UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE

MESSENAS MIRANDA ROCHA

RELEITURA DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM DE ESTUDANTES REPETENTES DE CÁLCULO I

Vitória
2016

MESSENAS MIRANDA ROCHA

RELEITURA DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM DE ESTUDANTES REPETENTES DE CÁLCULO I

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação, na linha de pesquisa de Educação e Linguagens - Linguagem Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.

Vitória
2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial de Educação,
Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Rocha, Messenas Miranda, 1972-

R672r Releitura do processo de aprendizagem de estudantes repetentes de Cálculo I / Messenas Miranda Rocha. – 2016.

246 f.: il.

Orientador: Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.

Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação.

1. Cálculo. 2. Educação – Matemática. 3. Ensino Superior. 4. Função de variáveis reais. 5. Matemática emocional. 6. Repetência – Educação. I. Santos-Wagner, Vânia Maria Pereira dos, 1955-. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Educação. III. Título.

CDU: 37

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM EDUCAÇÃO
PPGE UFES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

MESSENAS MIRANDA ROCHA

RELEITURA DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM DE ESTUDANTES REPETENTES DE CÁLCULO I

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Educação.

Aprovada em 25 de fevereiro de 2016.

COMISSÃO EXAMINADORA

Vania Maria Pereira dos Santos-Wagner

Professora Doutora Vania Maria Pereira dos Santos-Wagner
Universidade Federal do Espírito Santo

Professora Doutora Circe Mary Silva da Silva Dynnikov
Universidade Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Carlos Eduardo Ferraço
Universidade Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Edmar Reis Thiengo
Instituto Federal do Espírito Santo

Lilian Nasser

Professora Doutora Lílian Nasser
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Wanderley Moura Rezende

Professor Doutor Wanderley Moura Rezende
Universidade Federal Fluminense

“*Nada existe de permanente a não ser a mudança*”

Heráclito de Éfeso

*Dedico esta tese à minha esposa, **Valéria**, e ao meu filho, **André Rocha**, os quais, em todos os momentos, me apoiaram e incentivaram a ir em busca dos meus sonhos. Dedico, especialmente, à minha filha, **Bianca Rocha** (in memoriam), uma princesa que nos deixou de maneira repentina, mas que se encontra junto do Pai, intercedendo por nós.*

AGRADECIMENTOS

A **Deus**, antes de tudo, por todos os momentos em que, não tendo mais forças, Ele me carregou em seus braços.

À minha mãe, **Maria Ferreira de Miranda**, que, mesmo sem conhecer as letras e os números, sempre me ensinou princípios que precisam fazer parte da nossa vida, como: gratidão, humildade e amor ao próximo.

À minha sempre orientadora e mentora, professora **Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner**, pela amizade, paciência, e confiança de sempre acreditar que eu era capaz de realizar essa pesquisa. Ser seu orientando foi um privilégio que enriqueceu minha vida pessoal e profissional. Um exemplo de professora que levarei para sempre, um modelo a ser seguido.

Aos colegas professores da Banca Examinadora: às professoras **Circe Mary Silva da Silva Dynnikov** e **Lilian Nasser**, e aos professores **Wanderley Moura Rezende**, **Carlos Eduardo Ferraço** e **Edmar Reis Thiengo**, pelas considerações e anotações feitas ao trabalho, que tanto nos ajudaram.

Ao **Instituto Federal do Espírito Santo,** (IFES) - campus Itapina, pela licença concedida para cursar o Doutorado.

À **Universidade Federal do Espírito Santo** (UFES), por ter contribuído para minha formação, desde a licenciatura até o doutorado.

Aos **professores e servidores** do Programa de Pós-graduação em Educação (PPGE) da UFES.

Aos **meus alunos** universitários dos cursos de Agronomia e Licenciatura em Ciências Agrárias, participantes desta pesquisa, e ao **professor colaborador**, que sempre se dispuseram em responder nossos questionamentos e com os quais foi possível compartilhar tudo que aprendemos nessa investigação.

Aos colegas de doutorado, **Leandra**, **Geraldo**, **Thiarla**, **José Carlos** e **Simone**, que sempre se prontificaram a ajudar com suas leituras e sugestões valiosas.

RESUMO

Nesta pesquisa de doutorado em educação matemática investigamos como estudantes universitários, repetentes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (Cálculo I), resolvem tarefas de limite de funções reais de uma variável, que erros cometem e quais as causas que os levam à reprovação e/ou abandono da matéria. Assim, buscamos conhecer quem eram esses estudantes repetentes com relação a (i) hábitos de estudos; (ii) expectativas de aprendizagem de Cálculo e (iii) dificuldades anteriores com conceitos matemáticos. Analisamos motivos que os levaram a repetir essa disciplina e que os deixaram sem acreditar que poderiam aprender (ERNEST, 1989; GÓMEZ CHACÓN, 2003). Procuramos, também, compreender acertos e erros que cometeram ao determinar o limite de funções reais de uma variável (CURY, 2008). Para tanto, procuramos identificar e compreender erros conceituais e/ou procedimentais (erros operatórios) no cálculo de limites (SKEMP, 1976; CORNU, 1991; TALL, 1991). Desenvolvemos uma pesquisa de natureza qualitativa em que o professor pesquisador atuou junto com o professor de Cálculo I durante todo o primeiro semestre de 2014. Participaram 38 estudantes repetentes de Cálculo I dos cursos universitários de Agronomia e Licenciatura em Ciências Agrárias do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), Campus Itapina. Coletamos dados, por meio de observações de aulas, tarefas dos estudantes, questionários e entrevistas. A seguir, enunciamos alguns resultados desse estudo. Em relação aos hábitos de estudo, identificamos que o discurso e a prática dos estudantes eram divergentes. Eles foram tomando consciência dessa contradição e aprendendo a mudar hábitos de estudo durante o semestre. Relacionamos as expectativas de aprendizagem dos alunos e os aspectos emocionais e cognitivos, tais como crenças, concepções e atitudes em relação à disciplina de Cálculo I. Constatamos, então, que tivemos que alterar nossa postura de professor universitário, rompendo com nossas práticas pedagógicas distantes da realidade vivida pelo estudante. Acreditamos que, com essa mudança de comportamento, foi possível motivá-los e levá-los a acreditar que poderiam superar obstáculos e limitações de aprendizagem. Verificamos que existe relação entre dificuldades de aprendizagem de Cálculo e a falta de base de conteúdos matemáticos anteriores. Assim, passamos a revisar tais conteúdos em paralelo com os de Cálculo, não de forma isolada como fazíamos antes, no início de cada semestre. Esse trabalho integrado de conceitos matemáticos nos auxiliou a compreender e analisar erros dos repetentes. Também utilizamos análise de erros como estratégia pedagógica para tornar erros observáveis para professor e estudantes. Além disso, conseguimos identificar dificuldades epistemológicas de alguns conceitos específicos de Cálculo. Em síntese, observamos que essas estratégias pedagógicas diferenciadas do professor pesquisador favoreceram a aprendizagem de Cálculo e, também, possibilitaram uma mudança de postura dos universitários. Portanto, temos como tese que precisamos trabalhar com estudantes repetentes de Cálculo I, em cursos de serviços, de forma diferenciada daquela feita em cursos específicos de Matemática. Ademais, precisamos envolver ativamente os estudantes no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo.

Palavras-chave: Cálculo. Educação Matemática. Ensino Superior. Funções de Variáveis Reais. Matemática Emocional. Repetência – Educação.

ABSTRACT

In this doctoral research in mathematics education we investigate how university students who are repeating the discipline of Differential and Integral Calculus I (Calculus I) solve tasks about limits of functions of a real variable, what mistakes they make and the causes that lead them to fail or to give up the discipline. Thus, we searched for the repeating students' information related to (i) studying habits; (ii) learning expectations related to Calculus and (iii) previous difficulties related to mathematical concepts. We analyzed the reasons that led them to repeat this discipline and led them to believe they were not able to learn it (ERNEST, 1989; GÓMEZ CHACÓN, 2003). We also tried to understand their successes and their mistakes while they were determining the limits of functions of a real variable (CURY, 2008). To do so, we understood and identified conceptual and procedural mistakes (operational mistakes) while they were calculating limits (SKEMP, 1976; CORNU, 1991; TALL, 1991). We developed a qualitative research in which the professor researcher worked together with the Calculus professor throughout the first semester in 2014. Thirty eight repeating students in Calculus I participated in this research and they all were undergraduate students of Agronomy and Teaching in Agricultural Sciences at the Federal Institute of Espírito Santo (IFES), Campus Itapina. We collected data by observing classes and through students' tasks, questionnaires and interviews. Then, we enunciated some results of this study. In relation to the studying habits we identified that the discourse and the practice of the students were divergent. They were becoming conscious about this contradiction and started learning to change their studying habits during the semester. We connected students' learning expectations to the emotional and cognitive aspects, such as beliefs, conceptions and attitudes related to the discipline of Calculus I. We found that we had to change our university professor posture and to break with our pedagogical practices which were far from students' reality. We believe that with this behavioral change it was possible to motivate them to believe that they were able to overcome obstacles and learning limitations. We verified that there is a relationship between difficulties in learning Calculus and the lack of previous knowledge about mathematical contents. Therefore, we started to review these contents in parallel with the contents of Calculus, but not in an isolated way in the beginning of the semester, as we did before. This integrated work of mathematical concepts helped us to understand and to analyze the repeaters' mistakes. We also used the analysis of mistakes as a pedagogical strategy to make the mistakes visible to the professor and to the students. Furthermore, we succeed in identifying epistemological difficulties about some specific concepts of Calculus. In summary, we observed that these differentiated pedagogical strategies of the professor researcher encouraged the learning of Calculus and enabled a change of posture by the university students. Therefore, as a thesis we believe that we need to work with repeating students of Calculus I in in-service courses, differently from the way that it is taught in specific mathematics courses. Also, we need to actively engage the students in the process of teaching and learning Calculus.

Keywords: Calculus. Mathematics Education. Higher Education. Functions of Real Variables. Emotional Mathematics. Grade Repetition – Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

CAPES - Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior

COBEMGE - Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

IES - Instituição de Ensino Superior

IFES - Instituto Federal do Espírito Santo

IME-USP/SP - Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

PUC-SP - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

ROD - Regulamento de Organização Didática

SISU - Sistema de Seleção Unificado

UFES - Universidade Federal do Espírito Santo

UFF - Universidade Federal Fluminense

UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

> *Um homem tinha uma figueira plantada em sua vinha. Veio a ela procurar frutos, mas não encontrou. Então disse ao vinhateiro: Há três anos que venho buscar frutos nesta figueira e não encontro. Corta-a, porque há de tornar a terra infrutífera. Ele, porém, respondeu: Senhor, deixa-a ainda este ano para que cave ao redor e coloque adubo. Depois, talvez, dê frutos ... Caso contrário, tu a cortarás (Lc, 13: 6-9).*

A experiência de pesquisa que descrevemos nasceu da necessidade de compreender o insucesso e os motivos que levam estudantes universitários na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (Cálculo I) a repetir esse componente curricular por duas ou mais vezes. Sentíamos que precisávamos fazer algo por eles, para que acreditassem que seriam e são capazes de aprender, aumentando a confiança em si mesmos e melhorando sua autoestima. Além disso, tivemos que levar em conta as nossas dúvidas e reflexões sobre nosso próprio desempenho como professor da disciplina, na qual deixamos, nesses últimos dez anos, muitos estudantes reprovados. Arriscamo-nos a dizer que esses foram e são os fatores que determinaram esta investigação.

As pesquisas desenvolvidas por Ernest (1988,1989), Gómez Chacón (2003) e Menduni (2003), nos forneceram evidências empíricas de que o estado emocional (atitudes, crenças e concepções) interfere no desenvolvimento profissional do professor e no desempenho acadêmico dos estudantes. A partir, dessas evidências, buscamos em nossa pesquisa, desapegar de um comportamento unidimensional voltado para uma prática pedagógica cuja ênfase se dava aos aspectos cognitivos. Passamos a incorporar uma característica central para nós mesmos, que são as relações humanas entre professor/aluno e aluno/aluno dentro da prática pedagógica, e, além disso, começamos a valorizar as interações dos aspectos afetivos com os cognitivos.

Quando reanalisamos o que os estudantes tinham aprendido, ou não, sobre determinado conteúdo de Cálculo, e estavam reprovados não tomamos como referência só as notas para tirarmos conclusões. Procuramos compreender e refletir a respeito de todo o contexto da situação, ou seja, pensar em quais eram os fatores que estavam influenciando para que esse resultado negativo de reprovação se perpetuasse. Ademais, em nossas leituras, encontramos pesquisadores que tiveram como pressupostos em seus estudos que essas dificuldades poderiam ter origem em aspectos: i) de natureza psicológica, portanto, inerente ao sujeito (ERNEST, 1989, 1991; GÓMEZ CHACÓN 2003; MENDUNI, 2003); ii) de natureza epistemológica, talvez pela complexidade de alguns conceitos (JORDAAN, 2005; JUTER, 2006; REZENDE, 2003); iii) de natureza didática (ensino, aprendizagem e avaliação), ou seja, o modelo ou visão do professor e do aluno da natureza de ensino da matemática (GUZMÁN, HODGSON, ROBERT, VILLANI, 1998; HITT; PÁEZ, 2003).

Estudos internacionais, nacionais e as práticas do quotidiano do professor são reveladores dessas dificuldades que parecem se acentuar quando se dá a transição do Ensino Básico (ensino fundamental e médio) para o Ensino Superior (DOMINGOS, 2003). Em nossa pesquisa, foi importante considerarmos essa transição e, ainda, tínhamos o fato de que estávamos trabalhando com estudantes repetentes de Cálculo I. Portanto, eles já haviam estudado os conteúdos da disciplina e, de certa forma, tinham alguma consciência de onde haviam falhado. Encontramos um cenário em que alguns estudantes estavam repetindo a disciplina de Cálculo I pela terceira ou quarta vez. De certa forma, eles se sentiam incapazes de superar as suas dificuldades e limitações. Ou seja, eram estudantes que não acreditavam na própria competência e produtividade acadêmica, especificamente para a disciplina de Cálculo I. Diante disso, e parafraseando Bertold Brecht, podemos indagar:

> A árvore que não dá frutos
> É xingada de estéril
> Quem examina o solo? (Bertold Brecht)[1]

Será que nós, professores universitários, procuramos ou queremos conhecer quem são esses estudantes repetentes de Cálculo I? O que eles sabem ou o que eles não sabem? Mais do que deixar esses estudantes falarem, foi preciso saber ouvi-los. Sentimos a necessidade de auscultar (LORENZATO, 2010, p. 16) *esses estudantes,*

---

[1] Depois da leitura do trabalho de Menduni (2003) é que surgiu a ideia de dialogar com este poema de Bertold Brecht. Fizemos isso para nos auxiliar a compreender e problematizar nossos questionamentos e reflexões enquanto professor pesquisador.

que significa analisar e interpretar os diferentes tipos de manifestações dos alunos. O objetivo é saber quem são como estão, o que querem e o que podem eles.

> O galho que se quebra
> É xingado de podre, mas
> Não havia neve sobre ele? (Bertold Brecht)

Será que nós, professores universitários, temos consciência do papel da disciplina de Cálculo I para o curso que estamos ministrando? O currículo e a forma como estamos avaliando nosso aluno universitário é a ideal para o tipo de curso que ele está fazendo? Essas práticas pedagógicas de professores universitários podem funcionar como algo intransponível para os estudantes repetentes, ou seja, podem ser a sobrecarga de neve que caem sobre esses galhos fracos.

> Do rio que tudo arrasta
> Se diz que é violento
> Ninguém diz violentas
> As margens que o cerceiam. (Bertold Brecht)

Será que a disciplina de Cálculo I é mesmo difícil? Ou não seríamos nós, professores universitários, que estamos arrancando das encostas desse rio aquilo que o sustenta? Sua beleza? Ou, por que não dizer, estamos mudando de forma violenta sua trajetória natural? Cada uma dessas revelações, paralelos e interpretações tem um significado próprio, as quais podem ou não se relacionar entre si, e nem sempre se apresentam de forma explícita, logo, desvendar esses significados foi o desafio desta pesquisa.

2 INTRODUÇÃO

O propósito deste capítulo é contextualizar o trabalho de investigação. Inicia-se com uma descrição, de maneira breve, da relevância do estudo, e do papel da disciplina de Cálculo Diferencial I nos cursos de graduação. Depois, trazemos alguns resultados de pesquisas sobre a definição de limite no ensino superior e apresentamos os principais questionamentos e objetivos de pesquisa. Terminamos este capítulo apresentando uma visão geral da organização da pesquisa.

2.1 RELEVÂNCIA DO ESTUDO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral vem se configurando, nos últimos anos, como uma das disciplinas mais exigidas em diversos cursos superiores nas Instituições de Ensino Superior (IES). No Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), dos 29 cursos de graduação, 25 exigem a disciplina de Cálculo I nos seus primeiros semestres dos cursos. Atualmente, temos uma entrada anual de aproximadamente 1468 estudantes nesses cursos que exigem a disciplina de Cálculo I como pré-requisito. Os índices de reprovação nessa disciplina são, em geral, muito elevados, prejudicando o rendimento dos estudantes e atrasando o término de seu curso universitário. No IFES, a taxa média de reprovação gira em torno de 50%[2], ou seja, teremos 734 estudantes em regime de dependência anualmente se tivermos sempre a entrada de estudantes já mencionada. Desse total, em média, 40% repetem a disciplina mais de uma vez.

No IFES, Campus Itapina, no Curso de Agronomia, nos semestres de 2011/2 a 2014/1, ou seja, em seis semestres, dos 193 universitários matriculados na disciplina de Cálculo I, 94 alunos ficaram reprovados, representando um percentual de 48,70%. No Curso de Licenciatura em Ciências Agrárias, a situação é ainda pior e Cálculo é oferecido apenas no segundo semestre. Nos semestres de 2012/2 e 2013/2, dos 70 alunos matriculados nessa disciplina nesses semestres tivemos 51 alunos reprovados, ou seja, um percentual de 72,85%.

---

[2] Essas informações foram levantadas a partir de dados fornecidos pelo setor de Registro Acadêmico em dezembro de 2014.

Em outras instituições de ensino superior, a conclusão é semelhante, mesmo sabendo que algumas delas adaptam o curso de Cálculo à realidade local. No levantamento feito por Barufi (1999), no IME-USP/SP (Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade de São Paulo), a taxa de reprovação, por nota ou por falta, na disciplina de Cálculo para funções reais de uma variável foi de 66,9%, e, em Cálculo Diferencial e Integral, de 43,8%, disciplina oferecida para os cursos de Matemática, Física, Química, Ciências Econômicas, Administração, Contabilidade, Arquitetura, Geociências e Biociências. Na pesquisa realizada por Rezende (2003) na UFF (Universidade Federal Fluminense), a variação do índice de não aprovação (reprovado por nota, falta ou desistente) se encontrava na faixa de 45% a 95%, para a disciplina de Cálculo I, nos cursos de Engenharia, Química e Arquitetura. E para o curso específico de Matemática, esse percentual não era inferior a 65%. Segundo Rezende (2003, p. 3), *excluir o Cálculo de sua grade curricular ou criar disciplinas subsidiárias para o seu ensino representam, sem dúvida, indícios de que o tal problema já atinge limites próximo do insuportável*.

A pesquisa realizada por Garzella (2013) analisou os impactos das práticas pedagógicas adotadas por docentes de Cálculo I, no processo de ensino-aprendizagem e na vida acadêmica e pessoal dos estudantes na Universidade de Campinas. A partir de dados do setor acadêmico da universidade, foram analisadas, no período de 1997 a 2009, as taxas de reprovação e evasão da disciplina de Cálculo I. No processo de coleta de dados, Garzella (2013) assistiu às aulas durante um semestre inteiro como observadora e conversou com professores e alunos.

O levantamento histórico de doze anos (1997 a 2009) de informações encontrou taxas de até 77,5% de reprovação e evasão. Para Garzella (2013), as formas de organização didática da disciplina e a qualidade da mediação desenvolvida pelo professor em sala de aula, são fatores determinantes para o aproveitamento insatisfatório de grande parcela de alunos. É notória a alta taxa de reprovação nessa disciplina nos cursos universitários. Constatamos que esse fenômeno ocorre de maneira acentuada nas instituições de ensino superior (IES) e provoca uma demanda crescente de turmas extras na tentativa de atender a esses estudantes reprovados ou que evadem da disciplina.

Podemos perceber que não temos um problema só de aprendizagem da disciplina de Cálculo I quando ocorrem estes índices de reprovação e evasão, mas isso provoca uma série de fatores organizacionais nas IES. Esse atraso dos estudantes em concluírem a disciplina inicial de Cálculo gera pelo menos três obstáculos nas universidades. Primeiro é necessário prever-se quanto tempo cada estudante vai necessitar para integralizar seu curso de graduação. Segundo há a necessidade de organizar-se a oferta de disciplinas para repetentes. Em terceiro lugar as IES precisam aumentar custos com professores. A IES precisa concentrar-se em procedimentos de contratação de novos professores, uma vez que os docentes que lecionam as disciplinas de Cálculo I, II e III têm aumentado consideravelmente suas cargas horárias semanais de aulas para atender a essa demanda com turmas de repetentes. Além disso, os estudantes atrasam, em média, um ano de curso, isso por que a disciplina de Cálculo I é pré-requisito para diversas disciplinas como Física, Estatística, Álgebra Linear e outras da grade curricular de cada curso de graduação (Ver Anexo I e II).

No Brasil, são raros os estudos que se debruçam em tentar compreender as causas e motivos do insucesso de estudantes repetentes na disciplina de Cálculo I. Não encontramos no Banco de Teses do Portal de Periódicos da CAPES (Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior), nos últimos dez anos, nenhum trabalho que contemplasse essa problemática. Este estudo buscou identificar e compreender algumas causas desse insucesso. E reconhecemos que esse intuito de tentar compreender essas dificuldades dos estudantes nos possibilitou algumas reflexões sobre nossa prática e postura como professor universitário.

2.2 O PAPEL DA DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I NA GRADE CURRICULAR DE DIVERSOS CURSOS DE GRADUAÇÃO

Na tentativa de encontrar algumas respostas para o insucesso na disciplina de Cálculo I, no IFES, Campus Itapina, debruçamo-nos sobre alguns projetos de cursos de graduação dessa instituição. Em particular, analisamos a matriz curricular dos cursos de Engenharia Agronômica e Licenciatura em Ciências Agrárias, com o intuito de verificar qual seria o papel da disciplina de Cálculo I para esses cursos. Nesses dois cursos, ela possui uma carga horária de 60 horas e aparece como componente do conteúdo básico, apresentando o seguinte objetivo geral: "*Desenvolver a capacidade de raciocínio e compreensão dos conceitos que envolvem o cálculo de limites e continuidade de funções, criando soluções para questões propostas, adquirindo condições para discutir e criticar soluções obtidas comparando resultados de relevância científica bem como o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo na tomada de decisões (*Projetos dos cursos, ver Anexos 1 e 2*)".*

Conseguimos observar que não existe nenhuma diferença entre as matrizes curriculares. Verificamos, também, que essa é uma prática comum nos mais diversos cursos de graduação que contêm a disciplina de Cálculo I. Um discurso muito comum entre professores universitários de matemática é que "Cálculo" é Cálculo, independente do curso. Para Sad (1998, p. 2), *é comum escutar, entre os professores do 3º grau, que os objetos do Cálculo são sempre os mesmos, embora se fale sobre eles com algumas diferenças de tratamento, ou mesmo Cálculo é Cálculo, embora as aplicações se diversifiquem.* Esse argumento da autora reforça nossas convicções sobre como é pensado o curso de Cálculo nas diversas graduações.

Segundo Steen[3] (1998, apud DOMINGOS 2003, p. 2), *de acordo com sua experiência, os cursos, currículos e exames permanecem parados na tradição de alguns séculos atrás, enquanto que a autonomia e a liberdade acadêmica governam na sala de aula*. Consideramos positiva essa liberdade acadêmica que nós, professores do ensino superior, temos em diversificar o currículo. Acreditamos que muitas iniciativas adotadas para melhorar o desempenho desses estudantes surgem dessa liberdade.

O perfil traçado para a disciplina de Cálculo I nas graduações aparece nos seguintes contextos: nos cursos de graduação de matemática (licenciatura e bacharelado), como uma disciplina tradicional ensinada pelo Departamento de Matemática, e em cursos que necessitem de uma boa base matemática. Em algumas universidades,

---

[3] STEEN, L. A. Redefining university mathematics: The stealth campaign. **On the teaching and learning of mathematics at university level (Pre-proceedings)** (p.1-6). Singapura: ICMI, 1998.

também aparece como responsabilidade do Departamento de Matemática ministrar disciplinas de Cálculo e outras, por exemplo, para os cursos de Engenharias, para a Física, e a Química; e em graduação de serviços[4], como Administração, Economia, Biologia, Sistema de Informação, que empregam algum método matemático significativo, ainda que de maneira indireta.

Segundo Lima & Silva (2012), a disciplina de Cálculo quando é ministrada nessas diferentes graduações, que não seja a de Matemática, tem, como objetivo, fornecer ao estudante o ferramental matemático necessário para a resolução de problemas típicos de cada área de interesse. Dessa forma, a ênfase não costuma ser a sistematização simbólico-formal do Cálculo, e, sim, a habilitação do estudante para que aprenda a utilizar os conceitos e procedimentos desse campo de conhecimento, por exemplo, a ideia de derivada como taxa de variação, em situações das mais diferentes áreas. Em um curso de Economia, podemos destacar a interpretação da derivada como uma taxa de variação, especificamente, englobando os conceitos de custo marginal, receita marginal e elasticidade da demanda de um produto. Temos ciência que a formulação lógica dos problemas de maneira nenhuma irá substituir os resultados experimentais, mas, sem dúvida, poderá otimizá-los e torná-los mais eficientes.

Para Barbosa (2004, p.16), quando essa disciplina de Cálculo I (e/ou as outras disciplinas de Cálculo II, III e IV) aparece nos currículos dos *cursos de graduação de serviços,* não consegue estabelecer relações com as demais atividades do curso ou com a futura atuação profissional dos alunos. Em alguns casos, o que acontece é que tais disciplinas ficam isoladas no currículo, sem que os alunos e, em alguns casos os professores, encontrem um sentido para elas.

---

[4] A expressão “Matemática como curso de serviço” tem sido usada por pesquisadores em educação matemática para designar as disciplinas matemáticas ministradas em outras graduações que não são de Matemática (HOWSON, et al.1998, apud CATAPANI, 2001). HOWSON, A. G. et al. Mathematics as a service subject. In: Clements, R. R. et al. (eds.). **Selected papers on the teaching of mathematics as a service subject**. Wien – New York: Springer-Verlag, 1998, p. 1-16.

A partir da experiência como professor de Cálculo I, desde 2004, para estudantes de cursos universitários de Ciências Aplicadas como Engenharia Agronômica, Administração, Farmácia e Ciências Biológicas, nós constatamos alguns equívocos. Por exemplo, temos observado e vivenciado que boa parte desses estudantes apenas cursa a disciplina de Cálculo I de modo formal e obrigatório. Eles fazem isso por uma mera formalidade de cumprir o currículo exigido, principalmente porque ela está dentre as básicas obrigatórias desses cursos. Ou seja, eles devem cursar essa disciplina para poderem seguir com seu curso universitário e integralizarem a grade curricular de seu curso de graduação. Podemos dizer que existe pouca motivação por parte desses estudantes e inferir alguns possíveis motivos. Talvez por eles não compreenderem a importância dos conceitos de Cálculo para os problemas de suas especialidades. Ou por não terem naquele momento do curso, nos primeiros semestres, a maturidade de entenderem o quanto a matemática pode ser útil na solução de problemas que podem surgir em cada uma dessas profissões. Outro ponto problemático a comentar e refletir, nós, professores universitários, em muitos casos nem sabemos onde os conceitos podem ser aplicados.

2.3 RESULTADOS DE PESQUISAS SOBRE A DEFINIÇÃO DE LIMITE NO ENSINO SUPERIOR

As pesquisas que retratam o desempenho dos estudantes universitários na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral têm demonstrado um alto índice de reprovação (BARUFI, 1999; REIS, 2001; DOMINGOS, 2003; REZENDE, 2003; GARZELLA, 2013). Essas investigações apontaram que, embora alguns textos dirigidos ao ensino médio apresentem tópicos relativos aos rudimentos do Cálculo, esse assunto não é tratado nem de maneira superficial nessa modalidade de ensino (BARUFI, 1999; REZENDE 2003). Segundo Domingos (2003), verifica-se, no ensino superior, um elevado índice de retenção nos primeiros anos, sobretudo em disciplinas que exigem a construção e compreensão dos conceitos matemáticos mais abstratos, características que aparecem, sobretudo, nos conceitos matemáticos estudados em Cálculo.

Esse baixo desempenho tem algumas raízes em definições equivocadas, que alguns estudantes universitários têm sobre alguns conceitos da matemática básica (ensino fundamental e médio) que se relacionam com conceitos estudados em Cálculo I. Por exemplo, quando calculamos o limite da soma de uma progressão geométrica infinita, cujo módulo da razão está entre 0 (zero) e 1, e mostramos somente a fórmula para calcular o valor numérico dessa soma e não aproveitamos essa oportunidade para ressaltar a ideia intuitiva de limite que está por trás desse conteúdo.

As pesquisas realizadas por Sierpinska (1985); Tall (1991) e Cornu (1991) abordaram aspectos conceituais importantes para o ensino de Cálculo. Esses pesquisadores estudaram, por exemplo, a influência das concepções espontâneas em torno da ideia de limite. Ou seja, os significados e usos do termo limite na vida de cada estudante que interferem com o aprendizado em Cálculo. Essas ideias espontâneas se misturavam com os conhecimentos recém-adquiridos na disciplina, eram modificados e adaptados para formar as concepções pessoais dos estudantes.

Segundo Cornu (1991), os estudantes universitários encontram vários obstáculos quando devem calcular os “limites” usando técnicas mais sutis do que um simples uso de operações numéricas e algébricas. Os trabalhos de (HITT; PÁEZ, 2003; PÁEZ, 2001) abordam tanto as dificuldades de aprendizagem do conceito de limite quanto àquelas relacionadas com a forma como se ensina esse conceito. Esses pesquisadores mostram exemplos de algumas dificuldades que têm sido detectadas através de estudos experimentais. Em seus experimentos, eles abordaram: a) ideias primitivas de limite; b) ideia de limite como uma aproximação numérica; c) os significados das diferentes notações utilizadas para limite de funções; d) os conflitos com a ideia sobre conceito de limite como uma simples substituição numérica e os conflitos das leituras de gráficos de funções com relação ao limite. Para Hitt e Páez (2001), é importante introduzir os processos algébricos para a determinação de um limite, acompanhado de tarefas e/ou atividades que façam a conversão entre as outras representações numéricas, gráfica e algébrica.

O trabalho de Jordaan (2005) foi desenvolvido na tentativa de determinar os equívocos que os estudantes universitários têm da ideia de limite. O pesquisador queria compreender, por que os alunos sabiam calcular uma variedade de problemas relacionados ao conceito de limite de função, mas encontravam dificuldade em explicar a ideia de limite. Portanto, um dos seus objetivos era entender se a complexidade em entender o significado de limite era inerente à natureza da ideia de limite em si (razão de origem epistemológica) ou se era devido à forma como limite estava sendo ensinado pelo pesquisador, ou se seria devido a outras razões. Para Jordaan (2005) uma possível explicação para o problema identificado é que a ideia de limite é frequentemente ensinada de forma isolada. Os estudantes parecem experimentar um conflito entre a definição precisa e formal e as interpretações informais, descritas em linguagem natural, e que são convenientemente usadas no discurso verbal. Com isso os estudantes acreditavam que um limite era algo inacessível.

Essa concepção de limite como algo que não pode ser atingido, pode ser devido à linguagem utilizada em muitos livros para descrevê-lo, por exemplo, “tender a” e “aproximar-se de”. E também pode ser proveniente do uso do termo limite em nossa língua materna com outros significados. Por exemplo: (a) eu estou no meu limite de tempo; (b) eu estou no meu limite de dinheiro; (c) fulano está no seu limite de paciência para resolver esta situação; (d) alguém chegou ao limite do poço em seus problemas pessoais e profissionais; (e) chegamos ao limite dos terrenos; (f) qual é o limite destes municípios?; e (g) qual é o limite de tolerância de seu chefe? Nos enunciados envolvendo o termo limite apresentados nos itens (a), (b), (c) e (d), limite poderia ser pensado como algo a chegar, ou seja, algo a que se está tendendo e que nem chega a assumir esta posição. Já nos itens (e) e (f), limite foi usado com a ideia de fronteira, como algo que foi mensurado e identificado. Já no item (g), limite poderia ser interpretado como algo que a gente tende a encontrar, mas que se pretende não atingir, porque ninguém quer perder emprego e também entendido como sendo um valor máximo de tolerância do chefe.

E é claro, que poderíamos pensar em outros significados e usos do termo limite. Portanto, o professor de Cálculo deve tornar-se consciente e atento a estas sutilezas e detalhes dessa compreensão acerca de termo limite e dos possíveis equívocos dos seus alunos ao iniciarem a explorar o conceito de limite em Cálculo. Ademais, o professor deve investir tempo em seus planejamentos e em aulas e deve querer diagnosticar esses possíveis problemas conceituais e desenvolver estratégias de ensino específicas para auxiliar seus alunos a pensarem e reverem seus entendimentos de limite fora do contexto matemático e dentro de aulas de matemática.

A investigação realizada por Juter (2006) discutiu as representações mentais de limites de funções de quinze estudantes em uma universidade sueca, durante um curso básico de matemática. Os dados indicaram que alguns estudantes tinham representações mentais incoerentes, mas eles não reconheciam isso. Os resultados dessa pesquisa ainda revelaram que a maioria dos pré-requisitos[5] ou base conceitual dos estudantes não era suficiente para que eles entendessem o conceito de limite. Além disso, Juter (2006) comenta que essa falta de base os tornava incapazes de formar imagens conceituais coerentes de limite. Também foram abordadas as possíveis ligações entre a capacidade que tinham de resolver e gerenciar tarefas sobre limites de funções e suas atitudes. Concluiu-se que aqueles que tinham atitudes positivas desenvolviam melhor a capacidade de resolver problemas e tarefas que envolviam limite.

Para Murillo (2004), ao analisarmos os conceitos matemáticos ensinados na disciplina de Cálculo, podemos verificar que eles estão intimamente relacionados, sendo o conceito de limite um dos principais. Por exemplo, o conceito de limite relaciona-se com o de derivada, que, por sua vez, está diretamente associado com o de integral. Portanto, se pode assegurar que o conceito de limite é fundamental para a compreensão dos conceitos do Cálculo. Os pesquisadores White & Mitchelmore (1996), em um artigo sobre a história do limite, já afirmavam que "limite" é o conceito mais fundamental do Cálculo. Para esses investigadores, os principais conceitos de derivada, continuidade, integral, convergência e divergência de séries são definidos a partir do de limite.

De fato, o conceito de limite é um dos primeiros que distingue o nível básico da matemática para o que chamamos de matemática de nível avançado no ensino de Cálculo. De acordo com Cornu (1991, p. 153), *uma das maiores dificuldades no ensino e aprendizagem do conceito de limite não reside apenas na sua riqueza e*

---

[5] Para esse autor estes pré-requisitos seriam as fundações matemáticas dos estudantes.

complexidade, mas também na medida em que os aspectos cognitivos não podem ser gerados a partir da definição puramente matemática (tradução nossa)[6]. Além disso, o uso de termos aparentemente intuitivos, mas com significados distintos na linguagem cotidiana, gera outras dificuldades conceituais para os estudantes e prejudica a formalização do conceito de limite. Por exemplo, a ideia de aproximação em termos de módulo, e o uso dos quantificadores “para todo” e “existe”, que são utilizados na definição formal de limite por épsilon-delta geram problemas de entendimento. Para Cornu (1991), esses obstáculos conceituais podem causar sérias dificuldades na compreensão formal de limite.

A história da matemática nos mostra que o conceito de limite é complexo (MURILLO, 2004) e que sua definição e formalização foram desafiando matemáticos ao longo de muitos séculos. Segundo Rezende (2003):

> As noções de limite e infinitésimos sempre foram (e continuam sendo) dois nos fundamentais na grandeza rede do Cálculo. Podem ter suas estruturas e representações modificadas, ganhar mais ou menos importância no desenvolvimento das ideias básicas do Cálculo, de acordo com o momento histórico da própria produção matemática e científica em geral, mas, em qualquer etapa do desenvolvimento, estiveram sempre presentes na constituição daquilo que se chama Cálculo – área nobre e essencial do próprio conhecimento matemático (p. 83).

Se considerarmos que esse percurso histórico foi tortuoso para os matemáticos é de se esperar que boa parte dos conceitos matemáticos, estudados na disciplina de Cálculo, assim como a aprendizagem de limite, tanto em termos formais quanto em termos operatórios, gere muitas dúvidas nos estudantes. Para Santos (2010, p. 9) *compete, pois, ao professor olhar criticamente para as definições e tentar identificar e/ou prever obstáculos, à aprendizagem, que essas definições possam a vir criar na mente do aprendiz*. Obviamente, face aos objetivos dessa investigação, não é foco desse trabalho fazer um relato histórico do desenvolvimento do Cálculo, pois concordamos com Rezende (2003, p. 84) que a história do Cálculo é longa demais para ser abreviada, e fecunda o suficiente para se fazer recortes superficiais. Mas temos consciência que algumas das definições básicas do Cálculo, como o conceito

---

[6] One of the greatest difficulties in teaching and learning the limit concept lies not only in its richness and complexity, but also in the extent to which the cognitive aspects cannot be generated purely form the mathematical definition (p. 153).

de limite, de derivada e integral, usadas pelos nossos estudantes universitários, têm suas raízes nos conceitos descritos pelos matemáticos do século XVIII. Para Baron (1985) o uso do conceito de limite para fundamentar as bases do Cálculo foi defendido por Jean Le Rond d' Alembert (1717-1783), matemático, cientista e filósofo francês. Segundo Baron (1985), D' Alembert explicou o conceito de limite da seguinte forma:

> Limite substantivo (matemática). Diz-se que uma grandeza é o limite de outra grandeza quando a segunda pode aproximar-se da primeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandeza nunca possa exceder a grandeza a qual ela se aproxima; de modo que a diferença entre tal quantidade e seu limite é absolutamente indeterminável (BARON, 1985, p. 28).

Como essa definição apresentada por D' Alembert sofreu críticas, porque ela trouxe elementos que deveriam ser clarificados, o autor procurou deixar claro que a quantidade não poderia, na realidade, ultrapassar seu limite nem mesmo atingi-lo. Outro problema segundo Baron (1985, p. 33) *é que não está claro como a variável percorre seus domínios e como se aproxima de seu limite. A terminologia usada (por exemplo, a palavra "nunca") sugere um processo no "tempo", um movimento*.

Para Santos (2010), os trabalhos realizados por D' Alembert trazem uma forte concepção geométrica da noção de limite. Até poderíamos comentar que as suas ideias foram os preparativos para o trabalho de Cauchy (1789 – 1875) e Weierstrass (1815 – 1897) na construção rigorosa dos fundamentos do Cálculo. Esse movimento ficou conhecido como Aritmetização da Análise, *que na realidade foi uma busca pela fundamentação do Cálculo não mais de maneira geométrica, mas sim por meio dos números* (AMORIM, 2011, p. 35). No Ensino Superior, de maneira geral, utiliza-se a definição formal de Cauchy (1789 – 1875), que define o limite de uma função f num ponto como sendo:

> ... o número real d é o limite de f(x), quando x tende para c, que é ponto de acumulação do domínio da função (x) se para qualquer número real ε > 0, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que se tenha $|f(x) - d| < \varepsilon$, sempre que $x \epsilon X$ e $0 < |x - c| < \delta$. De forma simbólica escreve-se $\lim_{x \to c} f(x) = d$

$\Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\ 0<|f(x)-d|<\varepsilon$ (MIRANDA, SANTOS[7], 2004, apud SANTOS, 2010, p. 11).

Podemos perceber que esta definição formal do conceito de limite de uma função em um determinado ponto c, apresentada por Cauchy (1789 – 1875), traz algumas dúvidas aos estudantes pela complexidade exigida na construção do conceito. Outra limitação está relacionada à forma como o professor universitário aborda esse conceito de limite de maneira formal em suas aulas de Cálculo. Em sua tese de doutorado, Reis (2001) trouxe várias informações relevantes em entrevistas feitas com importantes professores de Matemática e autores de livros de Cálculo e de Análise, tais como Prof. Geraldo Severo de Souza Ávila, Prof. Djairo Guedes de Figueiredo, Prof. Elon Lages Lima e Prof. Roberto Ribeiro Baldino. Nesse trabalho, comenta os relatos dos autores em suas experiências como professores de Cálculo e de Análise. Ficou evidente a concordância entre eles da rejeição da forma rigorosa que fundamenta o ensino de Cálculo em relação ao conceito weierstrassiano de limites e continuidade com as notações de épsilon e deltas. O professor Geraldo Ávila destacou que:

> [...] apesar de o Cálculo ser, atualmente, um instrumento para físicos, engenheiros, químicos, biólogos, estatísticos, economistas e cientistas sociais: *seus conceitos fundamentais são profundos e sutis, e desafiaram os melhores matemáticos por cerca de século e meio. A devida apreciação desses conceitos só pode ser adquirida gradualmente e por via intuitiva*. Entendendo que o bom senso deve sempre prevalecer no terreno do ensino, o autor acredita que: o *Cálculo deve ser apresentado com um mínimo de formalismo, com apelo à intuição e aos problemas de Física e Geometria que lhe deram origem* (REIS, 2001, p. 111). (Destaques do autor da pesquisa).

Concordamos com os argumentos do professor Geraldo Ávila sobre o bom senso que o professor universitário deve ter em relação à formalização de conceitos de Cálculo no processo de ensino. Fazemos também algumas reflexões sobre como foi nossa formação matemática. Acreditamos que nossos professores de Cálculo I nos ensinaram o conceito de limite, pela lógica do conceito weierstrassiano. Esse formalismo dos conceitos de Cálculo, utilizados por nossos professores na disciplina de Cálculo I, parece que nem nos ajudou. Acreditamos que esses procedimentos de

---

[7] MIRANDA, F.; SANTOS, L. **Introdução à análise real**. Braga, Portugal: Departamento de Matemática da Universidade do Minho, 2004.

ensino não nos auxiliaram muito na construção do conceito de limite. Lembramos que só fomos compreender melhor o conceito formal de limite quando iniciamos o estudo de Análise, já no final do curso de Licenciatura em Matemática.

Atualmente, refletindo sobre as primeiras aulas em 2010 quando atuamos como professor de Cálculo no IFES, campus Itapina, verificamos que repetimos cenários passados. Em nossas memórias e reflexões, identificamos que seguimos a mesma lógica de nossos professores no curso de Matemática, ao procurar definir o conceito de limite em nossas aulas de maneira formal. O bom é que não demoramos muito a perceber que essa não era a melhor maneira de definir esse conceito tão sutil para turmas de Engenharia Agronômica e de Licenciatura em Ciências Agrárias. Atualmente, temos recorrido para o mínimo de formalismo e utilizamos, de maneira consciente, a intuição, dando ênfase aos problemas geradores desse conceito.

Concordamos com Cornu (1991), quando afirma que, na maioria dos conceitos matemáticos, o ensino não começa em um território virgem. Ele considera que o ensino de Cálculo inicial tende a enfatizar o processo de aproximação do limite, em vez do conceito formal de limite em si mesmo. Para desenvolvermos o significado de limite e/ou o reconstruirmos com estudantes repetentes, nós necessitamos encarar alguns desafios enquanto professores universitários. Precisamos partir do princípio de que eles já trazem algumas ideias intuitivas de limites, e evidenciam dúvidas anteriores ao calcularem algumas tarefas de limites de funções reais de uma variável. Ademais, precisamos e devemos lembrar sempre que estamos atuando em um curso de graduação de serviço, que não é de matemática. Ter consciência de tudo isso é ainda mais desafiador.

Para Cornu (1991), a distinção entre definição e conceito em si é muito importante didaticamente. Compreender a definição é uma coisa, adquirir o conceito fundamental é outra. Mostra disso é a ideia de aproximação, usualmente encontrada por meio da noção dinâmica de limite. O modo como o conceito de limite é posto a funcionar, para resolver problemas reais, não depende da definição, mas de diversas propriedades do conceito intuitivo.

Quando analisamos e refletimos sobre como abordamos anteriormente o conceito de limite em aulas, listas de exercícios e em provas, nós fizemos algumas constatações. Por exemplo, examinamos como aparecia o conceito de limite de funções reais de uma variável em provas e listas de exercícios que aplicamos anteriormente (de 2010 a 2013) e na pesquisa de campo em 2014. Verificamos nas resoluções de estudantes algo que se assemelhava ao chamado método dinâmico da imagem do conceito de limite. Parece que a prática do professor enfatizou na mente dos estudantes, o que Tall e Vinner (1981) consideraram como um método dinâmico da imagem do conceito de limite, a partir de palavras como “aproximar”, “estar perto de”, “tender a”.

Por exemplo, quando solicitamos para estudantes calcularem o $\lim_{x\to 2}(2x+1)$, é comum observarmos resoluções em que eles atribuíam valores próximos de 2. Isto é, para efetuarem este cálculo de limite, eles pensavam em valores de x tendendo a 2, e assim substituíam valores de x maiores do que 2 e valores menores do que 2. Ou procuravam atribuir diretamente o valor de x solicitado no limite para resolver aritmeticamente a expressão, e quando o valor de x assumisse os valores especificados, concluiriam o cálculo do valor do limite.

Fica evidente para nós que a maior parte dos estudantes nem se questionava se para o valor de x, para o qual solicitamos o limite, a função dada estava ou não definida naquele valor, nem de pensar se o valor de x pertenceria ao domínio daquela função. Será que os professores universitários e os pesquisadores já se questionaram a respeito das causas deste abandono conceitual ou desta falta de olhar matemático dos estudantes, quando solicitados a calcular um limite? De onde eles aprenderam a ter este comportamento de usar quase um piloto automático sem reflexões e questionamentos conceituais para efetuar um cálculo de limite?

Realizar uma reflexão detalhada a respeito do conceito de limite de funções reais, de como o abordamos e como cobramos em turmas de Cálculo I foi e é de suma importância. Exemplificamos isto ao observarmos, a partir dos relatos e tarefas de estudantes, que quando eles não conseguiam entender essas ideias iniciais ou intuitivas do conceito de limite, eles ficavam desmotivados de estudar e às vezes abandonavam o curso ou se saiam mal na primeira prova. O que nós professores temos observado é que alguns conseguiam calcular os limites e utilizavam a ideia intuitiva na resolução de alguns problemas. Mas, o que também temos verificado é que eles, não tinham uma compreensão satisfatória sobre a natureza da ideia de limite.

2.4 NECESSIDADES DA INVESTIGAÇÃO

É comum ouvirmos, nos corredores do IFES de Itapina, de alguns estudantes repetentes, que estão no regime de dependência na disciplina de Cálculo I, questionamentos a respeito do futuro professor. Eles querem saber quem será o professor que vai trabalhar a disciplina, eles fazem esse questionamento por que, dependendo de quem seja, preferem não se matricular novamente na disciplina. Posicionamento esse que retrata algumas crenças desses discentes sobre o papel dos professores na sua aprendizagem. Provavelmente, alguns desses estudantes, conforme argumenta Gómez Chacón (2003), acreditam em uma didática tradicional de ensino, cujas crenças mais fortemente arraigadas são: de um professor como transmissor de conhecimentos e como fonte de respostas. De acordo com esse pensamento e crença, o seu papel de aluno é de esforçar-se para aprender todos os conteúdos que o professor lhes transmite. Nessa lógica, a disciplina está orientada exclusivamente para a aquisição de conceitos, com característica unicamente informativa. Gómez Chacón (2003, p. 67) ajuda-nos a compreender o problema:

> [...] Quando estudantes chegam à sala de aula com uma série de expectativas sobre como deve ser a forma que o professor deve ensinar-lhes matemática. Quando a situação de aprendizagem não corresponde a essas crenças, produz-se uma grande insatisfação que interfere na motivação do aluno.

Para nós, professores universitários, esse pré-julgamento que os estudantes fazem de nós e da forma de trabalharmos os conteúdos matemáticos em aula nos incomodava, especialmente, por parte dessa turma, em 2014, constituída exclusivamente por estudantes repetentes. Trazemos, como exemplo, a atitude de um universitário que conseguimos ouvir na primeira aula em que apresentávamos a proposta da pesquisa e informávamos que contávamos com a colaboração deles. O comentário foi marcante. O estudante, que já tinha sido reprovado duas vezes como aluno do professor-pesquisador, disse baixinho para um colega que estava ao lado: “Esse cara de novo”. Esse breve relato, apesar de bem discreto, reforça os argumentos de Gómez Chacón (2003, p. 23) de *que, ao aprender matemática, o estudante recebe estímulos associados a ela – problemas, atuações do professor, mensagens sociais, etc. que geram nele certa tensão*. A partir desses estímulos, reage emocionalmente de forma positiva ou negativa.

E essa reação do estudante está condicionada por suas crenças sobre si mesmo e sobre a matemática. Se o estudante depara-se com situações similares repetidamente, produzindo o mesmo tipo de reações afetivas, então a ativação emocional (satisfação, frustração, etc.) pode ser automatizada e se “solidificar” em atitudes e emoções que influenciem suas crenças, e estas podem colaborar de forma positiva ou negativa para sua aprendizagem e sua formação. Portanto, faz-se necessário, e conveniente, levar em conta fatores afetivos desses estudantes repetentes e dos professores como nos informam algumas pesquisas (ERNEST, 1989, 1991; GÓMEZ CHACÓN 2003; MENDUNI, 2003). As emoções, atitudes e crenças atuam como forças impulsionadoras ou de resistência à aprendizagem.

Diante desse cenário, nosso desafio foi pensar em como poderíamos melhorar as perspectivas de aprendizagem dos estudantes repetentes. Ademais, passamos a pensar em questionamentos assim: (1) O que nós, professores, precisaríamos melhorar e/ou alterar em nossa prática pedagógica? (2) Quais intervenções seriam necessárias para ajudá-los a saírem do estado de bloqueio diante da disciplina de Cálculo I e da própria Matemática?

Dois fatos foram fundamentais para focalizar o tema da pesquisa: a) as leituras que fizemos no período de mestrado, desde 2009, e doutorado, desde 2012; b) a experiência com o estudo exploratório no primeiro semestre de 2013, com uma turma de repetentes de Cálculo I. A partir disso, sentimos a necessidade de buscar algumas respostas para algo que estava nos incomodando muito: a grande quantidade de estudantes reprovados em Cálculo I, especificamente em nosso campus. Destacamos também que nos preocupava o fato de termos em nosso campus apenas dois cursos de graduação, e não mais do que três professores para atender a essa demanda crescente de estudantes repetentes de Cálculo I a cada semestre.

Nós, professores, sabíamos que tínhamos condições de investigar o problema e ajudar a reduzir esse número de reprovações. Iniciamos nos questionando: “Por que existe um alto índice de reprovação em Cálculo I? Por que estudantes que são repetentes por duas, três e até mais vezes chegam para cursar novamente a disciplina de Cálculo I, às vezes, desmotivados e com baixa autoestima?” A partir desses questionamentos, é importante que nós, professores universitários, sejamos conhecedores de uma metodologia pedagógica que nos permita refletir sobre como elevar a autoestima do estudante, para que possa compreender que possui a capacidade de aprender. Além disso, procurar também refletir sobre como levar o estudante a sentir-se com vontade de aprender e de ser agente ativo de seu processo de aprendizagem. Ou, como diria Rubem Alves (2007), deixar o estudante com fome de aprender.

A experiência de pesquisa com o estudo exploratório nos conduziu a acreditar que precisávamos investigar alguns conceitos introdutórios do Cálculo. Isso se confirmou após alguns estudantes nos relatarem que os conteúdos específicos de Cálculo I, como limite e derivada, eram aqueles que eles tinham mais dificuldades de aprender, o que de certa forma, fazia com que eles desistissem a partir do resultado das primeiras avaliações. Decidimos, então, concentrar nossos esforços no conteúdo de limite, especificamente em limites de funções reais.

A escolha por esse tema se deu inicialmente porque havíamos decidido pela sequência temática de conteúdos limite-continuidade-derivada-integral, como comenta Barufi (1999, p. 52) ao dizer que essa sequência *se constitui na apresentação do Cálculo sistematizado, formal e logicamente organizado, como resultado de um processo de construção de conhecimento que exigiu muita persistência de pensadores, filósofos e matemáticos durante séculos*. A nossa lógica inicial era que, se o estudante compreendesse o conceito de limite, ele estaria apto a definir derivada a partir da definição de limite e, consequentemente, considerar a integral como uma antiderivada. Conforme Barufi (1999) essa sequência temática *parece basear-se no fato questionável de que a lógica interna consistente [da matemática] deva garantir a aprendizagem significativa por parte dos estudantes (p. 52)*. Além disso, essa era a sequência didática que vínhamos adotando em nossas turmas anteriores e que, geralmente, aparece na maioria dos livros-textos de Cálculo e Análise.

O segundo motivo para a escolha do tema ocorreu porque nos cursos de Agronomia e de Licenciatura em Ciências Agrícolas (LICA) aparecem diversos problemas de aplicação interessantes. Descobrimos problemas relacionados à Física, à Topografia, à Química aplicada à Agronomia, aos cálculos de custos de produção e a outros, nos quais os estudantes necessitariam estudar mais profundamente as funções reais e suas propriedades. E porque nós, professores, tínhamos observado que esse era um conteúdo em que demonstravam certa dificuldade.

Os estudos realizados por Guzmán, Hodgson, Robert e Villani (1998), Nasser, Souza, e Torraca (2012), e por Brolezzi (2003) discutem a problemática da passagem do ensino de matemática em nível médio para o superior. Esses autores todos destacam que a matemática adquire um caráter distinto de abordagem e raciocínio no nível universitário. Eles afirmam que passa de um pensamento matemático elementar para um pensamento matemático avançado no ensino superior.

Geralmente, é cobrada dos estudantes universitários uma experiência formal com conteúdos matemáticos de ensino médio, que eles não possuem. Podemos considerar que boa parte dos conteúdos matemáticos estudados, na escola em nível fundamental e médio, exigia dos alunos principalmente um entendimento de matemática instrumental (SKEMP, 1976). De acordo com esse autor, a escola cobrava dos alunos domínio e conhecimento matemático de procedimentos instrumentais de resolução de exercícios, e, por que não dizer, em alguns casos, exigiam-se, na educação básica, apenas memorizações de tipos de solução e aplicações de fórmulas em tarefas matemáticas. Quando esses alunos entram na graduação, é evidenciada a falta de pré-requisitos de conteúdos da matemática elementar (de ensino fundamental e médio) e, principalmente, daqueles que exigem uma maior capacidade de abstração e generalização.

De acordo com Skemp (1976), um ensino e aprendizagem de matemática que buscam um entendimento relacional precisam estar especificamente voltados para uma edificação de estruturas conceituais, onde o estudante saiba o que fazer em determinada tarefa matemática e também saiba como fazer e por que fazer, e saiba também explicar tudo que está envolvido na tarefa e a resolução feita. Quando alguém entende um conceito matemático de forma relacional ele vai poder identificar relações entre esse conceito e outros conceitos e os procedimentos operatórios envolvidos nos diferentes conceitos matemáticos. Acreditamos que se um estudante entende relacionalmente um conceito, que ele estará construindo estruturas conceituais a partir das quais devem ser exploradas as diversas possibilidades para realização de uma mesma atividade matemática. Por exemplo, os estudantes precisam saber calcular um limite de função a partir dos métodos algébricos, numéricos e geométricos e diremos que entendem este conceito de forma relacional se souberem passar de um método para o outro e souberem explicar cada resolução.

Estudos de educação matemática e práticas do quotidiano do professor são reveladores das dificuldades de compreensão e generalização de conceitos matemáticos enfrentados pelos estudantes ao longo da sua vida escolar (DOMINGOS, 2003; GUZMÁN, HODGSON, ROBERT, VILLANI, 1998). Para alguns autores, elas parecem acentuar-se quando se dá a transição do ensino médio para o superior. Segundo Nasser, Souza, e Torraca (2012), alguns professores tentam justificar o baixo desempenho dos estudantes no ensino superior, argumentando que alguns alunos não sabem os conteúdos da matemática elementar, os quais servem de suporte para a compreensão de conceitos matemáticos que envolvem um pensamento matemático avançado.

Esses argumentos das pesquisas estudadas, junto aos questionamentos e reflexões já mencionados no texto deram um ponto de partida para a caminhada da pesquisa. Primeiramente, reflexões sobre nosso papel de professor na aprendizagem de estudantes repetentes. Dentre elas, destacamos nossas características pessoais positivas e negativas, nossa metodologia de ensino e capacidade de considerar a diversidade de estudantes. Refletimos a respeito dessa diversidade estudantil, suas crenças, concepções e também características individuais, fatores que anteriormente eram totalmente desconsiderados por nós, professores.

Além disso, refletir a respeito de todos estes fatores foi fundamental para a nossa escolha do conteúdo matemático em que precisávamos nos debruçar nesta investigação de doutorado. Concluímos que seria o conceito de limites de funções, por se tratar de um conteúdo em que algumas noções básicas do Cálculo encontram-se alicerçadas. Ademais, por sabermos que causa muitas dificuldades aos estudantes ingressantes na universidade e, muitas vezes, acaba sendo o vetor do início do problema da repetência e do abandono da disciplina.

2.5 QUESTÕES E OBJETIVOS DA PESQUISA

Nossa investigação foi centrada em compreender as dificuldades de aprendizagem[8] de estudantes repetentes no cálculo de limites de funções reais de uma variável. Percebia-se, pela experiência realizada com o estudo piloto em 2013, com uma turma de estudantes repetentes, que precisávamos considerar alguns elementos importantes no processo de ensino-aprendizagem: os estudantes, nossa postura como professor e como pesquisador, nossa proposta de trabalho e dificuldades específicas do conteúdo de limite. Assim, nossa pesquisa buscou responder aos seguintes questionamentos:

A) ***Quem são esses estudantes repetentes? Quais são suas expectativas de desempenho na disciplina de Cálculo I quando repetem essa disciplina? Quais foram os principais motivos que os levaram a ficar reprovados em Cálculo I e/ou a abandoná-la nas primeiras semanas do curso? O que pensam e acreditam que podem aprender de Cálculo I como estudantes repetentes?***

Os objetivos do estudo de doutorado centraram-se na aprendizagem do conceito de limite de funções reais de uma variável e na tentativa de conhecer melhor quem eram esses estudantes com relação a hábitos de estudos e expectativas de aprendizagem. Acreditamos que, ao tentar conhecê-los, consequentemente nos aproximaríamos deles e teríamos uma chance de criar uma relação professor-aluno

[8] Dificuldade de aprendizagem de Cálculo I referente à compreensão do que seria calcular um limite de uma função real de uma variável. Erros nos procedimentos de cálculos de limites, provenientes da falta de experiências prévias, tanto com raciocínio lógico quanto na escolha do procedimento para resolver a questão.

mais próxima, mostrando a eles que estávamos preocupados com seu rendimento acadêmico e motivá-los a superar suas limitações na aprendizagem de Cálculo I. Enfim, os objetivos iniciais da pesquisa eram:

1) Identificar, em estudantes repetentes de Cálculo, os seus hábitos de estudos, expectativas de aprendizagem e dificuldades com conceitos matemáticos anteriores e com conceitos específicos de Cálculo I. Ou seja, conhecer quem são esses estudantes repetentes de Cálculo I;

2) Compreender causas e consequências do insucesso de estudantes repetentes em Cálculo I, e motivos do abandono dessa disciplina quando repetente. Ou seja, compreender os motivos que os levavam a repetir essa disciplina por uma, duas ou mais vezes, pois as várias repetências na disciplina os deixavam sem acreditar que podiam aprender e, por isso, abandonavam-na.

Outra característica da pesquisa foi pensar em um curso de Cálculo I para estudantes repetentes, pois acreditávamos que, se repetíssemos a mesma proposta de trabalho das nossas turmas regulares, não conseguiríamos que eles se motivassem. Portanto, pensamos em um planejamento pedagógico diferenciado, em que atuássemos de outra forma ao explorar os conteúdos e propor tarefas aos estudantes e interagíssemos com eles de modo a mostrar que acreditávamos no potencial de eles aprenderem. Ademais, pensamos também em estimular que eles participassem das aulas e dos horários de atendimento extra.

Também buscamos identificar dificuldades de aprendizagens, nos procedimentos de cálculos de limites de funções reais, desses repetentes, desde o início da pesquisa e de tornarmos alguns de seus erros observáveis ao comentar e questionar procedimentos de resolução. Assim, utilizamos esses erros cometidos pelos estudantes em tarefas, testes e avaliações ao longo da pesquisa de campo, como estratégias pedagógicas que pudessem levá-los a superar esses obstáculos conceituais e procedimentais, relacionados ao conceito de limite de funções reais e da falta de conhecimentos da matemática básica. Para nós, foi o momento de procurar entender como elaborar tarefas que levassem em consideração os erros por eles cometidos, como comentam Borasi (1985), Pinto (1998) e Cury (1989, 1994). Diante desse contexto, tecemos também os seguintes questionamentos:

B) Que dificuldades estudantes repetentes têm ao resolver tarefas de limite? Afinal, quais são os erros que eles cometem ao resolverem limites de funções? São erros referentes aos conteúdos da matemática básica ou erros específicos de Cálculo?

Pretendia-se, com este estudo, analisar as respostas dos estudantes universitários repetentes da disciplina de Cálculo I em questões que envolvessem limites de funções reais. Neste estudo não se desejava somente corrigir os erros cometidos pelos estudantes, mas levá-los a refletir sobre eles. Um aspecto importante da nossa investigação foi tentar compreender a origem desses erros, identificando se seriam conceituais ou operatórios. Para obter essas informações, delimitamos os seguintes objetivos:

3) Identificar dificuldades de aprendizagem de estudantes repetentes de Cálculo sobre conceito de limites de funções reais de uma variável;

4) Identificar e compreender acertos e erros (erros conceituais e/ou erros operatórios) de estudantes repetentes em tarefas de limites de funções reais.

2.6 ORGANIZAÇÃO DA INVESTIGAÇÃO

Esta pesquisa está organizada em seis partes ou capítulos. Na primeira parte, temos uma apresentação em que trazemos algumas de nossas escolhas e questionamentos sobre o ensino de Cálculo. No capítulo dois, que denominamos de introdução, trazemos alguns dados iniciais quantitativos do desempenho da disciplina de Cálculo I no IFES e de outras instituições de ensino superior. Citamos a problemática do estudo, nossas justificativas e motivação. No terceiro capítulo, apresentamos estudos, pesquisas e o embasamento teórico que nos ajudaram a compreender o contexto do nosso problema de pesquisa e que utilizamos para a análise dos dados. Dialogamos com alguns trabalhos que possuem interseção com o nosso eixo de trabalho: ensino superior, pensamento matemático avançado, estudo do conceito de limite, transição da matemática básica para a matemática avançada e análise de erros. Esses estudos serviram de base para nossas análises, dos dados desta investigação.

O quarto capítulo apresenta as opções metodológicas da pesquisa. Trazemos informações sobre os sujeitos do estudo, instrumentos e procedimentos metodológicos necessários para responder a nossos questionamentos e confirmar ou não, nossas hipóteses de trabalho. No quinto capítulo, apresentamos nossas análises e discussões sobre os principais resultados do estudo e algumas conclusões iniciais. No sexto capítulo, apresentam-se as considerações finais e reflexões do professor-pesquisador. E, na parte final, incluem-se as referências bibliográficas, apêndices e anexos.

3 REVISÃO DA LITERATURA E ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo, deseja-se rever estudos e temas que estão diretamente relacionados ao ensino e à aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Essas pesquisas e teorias sobre o ensino superior nos auxiliaram na categorização e análise dos dados, permitindo-nos caracterizar e compreender como estudantes universitários podem adquirir e/ou aprender tanto o conceito quanto estratégias de resolução de limite de funções. As fontes de pesquisa foram sites e departamentos de pesquisas ligados à matemática e à educação matemática.

Buscamos diversas fontes de pesquisa como: teses de doutorado, dissertações de mestrado, livros e capítulos de livros, artigos em revistas, periódicos, e em anais de congressos. As buscas aconteceram no banco de teses e portal de periódicos da Capes, nas bibliotecas da UFES e do IFES, nas bibliotecas digitais das principais universidades brasileiras e de algumas estrangeiras, nos anais dos principais congressos de Educação Matemática e do Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE).

3.1 ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral tem sido um dos focos de diversas investigações em educação matemática no Brasil e no exterior. Apresentaremos algumas ideias, argumentos e resultados das experiências encontradas em teses, dissertações, artigos e livros que nos forneceram um caminho para delimitar o tema desta pesquisa. As investigações de Barufi (1999); Domingos (2003); Rezende (1994; 2003); e Reis (2001), cujos objetivos foram superar os problemas e as dificuldades no ensino de Cálculo, trouxeram-nos alguns questionamentos, reflexões e sugestões de atividades.

No trabalho de Barufi (1999), discutiram-se as dificuldades existentes nos cursos introdutórios de Cálculo à luz do referencial teórico da rede de conhecimentos e significados. Buscou-se a compreensão dessas dificuldades a partir da análise dos principais livros didáticos adotados para a disciplina de Cálculo. Segundo Barufi

(1999), a escolha pela análise dos livros aconteceu, porque esse é um dos instrumentos mais usados, e podemos arriscar-nos a dizer que, em muitos casos, o livro didático é o único instrumento usado pelos professores em aula para ensinar Cálculo. Além dos livros didáticos, discutiu-se o papel do professor na sala de aula, tendo como aliado o computador, um instrumento facilitador.

Dentre os resultados obtidos pela pesquisa de Barufi (1999) na análise dos livros selecionados, verificou-se que muitos deles apresentavam propostas que mais se aproximavam daquelas de um curso de Análise Real. Segundo a autora, essa abordagem de Análise Real não é, de maneira alguma, apropriada para um curso inicial de Cálculo na matemática ou engenharia. Além disso, Barufi (1999) revela, em sua pesquisa, que as exigências de um curso introdutório de Cálculo, no qual a dedução e o formalismo são preponderantes, tornando-se um dos aspectos mais importantes da abordagem realizada, não condizem com o nível de maturidade do estudante ingressante na universidade.

Em sua análise dos livros-texto usualmente utilizados em cursos iniciais de Cálculo, percebeu-se uma predominância da sequência de Cauchy-Weierstrass na disposição didática, ou seja, primeiro define-se formalmente o conceito de limite que será usado para definir continuidade, derivada e integral de uma função. No trabalho de Barufi (1999), foram encontrados livros que não focalizam as ideias essenciais do Cálculo por meio de problemas importantes e motivadores, ainda que vários deles, embora não partam de situações-problema, consigam mostrar que o Cálculo tem diversas aplicações nas diferentes áreas do conhecimento. Nota-se que é relevante analisar a abordagem do Cálculo Diferencial e Integral nos livros didáticos e as possíveis contribuições das informações veiculadas por esses livros para a compreensão do professor e do aluno universitário. Necessita-se, ainda, identificar as influências que a veiculação dessas abordagens traz ao professor e ao universitário em suas atitudes em sala de aula.

De acordo com Barufi (1999), é conveniente esclarecer que alguns textos matemáticos dirigidos à escola média apresentam tópicos relativos às ideias fundamentais do Cálculo em seus capítulos. Mas, de maneira geral, os assuntos referentes a esse componente são tratados de forma que nem auxilia a compreensão dos conceitos nem prepara o futuro estudante universitário para o que vai estudar na graduação. Podemos observar isso no trecho abaixo.

> Na escola média, os alunos trabalham alguns conceitos matemáticos, muitas vezes de maneira isolada, com, na melhor das hipóteses, um enfoque significativo, e, apesar de os professores da universidade esperarem haver domínio de algumas técnicas operatórias, normalmente a linguagem lógico-formal não está satisfatoriamente estabelecida. A Matemática com a qual os estudantes trabalharam, na maioria das vezes, permaneceu no âmbito da intuição, com algum aspecto voltado, talvez, para o prazer da descoberta. Nesse sentido, o conhecimento matemático não foi estabelecido como um todo articulado, logicamente estruturado. (BARUFI, 1999, p. 148).

A autora também comenta que, em alguns casos, no ensino superior o tratamento lógico-formal dedutivo foi sendo atenuado, priorizando um ensino de Cálculo que buscava o convencimento a partir de verificações simples de que alguns resultados funcionavam em casos particulares, deixando de lado as demonstrações rigorosas. Para Barufi (1999), o conteúdo de Geometria Euclidiana ensinado durante anos no ensino fundamental, por exemplo, eram através das relações entre os postulados, definições, propriedades, lemas e teoremas. Faziam-se as demonstrações necessárias para tornar explícito o caráter dedutivo da Geometria, *embora não houvesse garantia alguma de convencimento* (BARUFI, 1999, p. 149). Essa mesma autora argumenta que:

> Nesse, contexto, os alunos começavam a formar algumas ideias, e, não muito mais do que isso, a respeito do que pudesse vir a ser uma teoria dedutiva, pois o trabalho com o conteúdo de Geometria, logicamente estruturado, constituía, normalmente, uma simples revelação. Aquilo que ficava claro para os estudantes era a existência de certo tipo de linguagem e talvez de algumas propriedades das figuras geométricas. Nada disso, entretanto, garantia aprendizagem significativa e, por isso mesmo, precisou ser revisto (BARUFI, 1999, p. 149).

Uma vez demonstrado a ineficiência da forma como a geometria era ensinada para os alunos do ensino básico, ou seja, como um sistema lógico dedutivo, foi preciso trabalhar a Geometria de uma forma diferente. *Dessa forma o tratamento lógico-formal dedutivo foi sendo atenuado, buscou-se mais o convencimento através de verificações, deixando, muitas vezes de lado, as demonstrações rigorosas* (BARUFI, 1999, p. 149). Esse tipo de comportamento do professor na busca de um tratamento mais adequado, para os conteúdos de matemática mais complexos no ensino básico (fundamental e médio), propiciou uma possível melhoria no ensino/aprendizagem de um determinado conteúdo específico, mas, possivelmente, esse tipo de postura teve consequências importantes no ensino universitário. Segundo Barufi (1999, p. 149) *no caso do ensino da Geometria, percebeu-se que a estrutura lógico-formal não era condição necessária, nem suficiente, para garantir a compreensão, o mesmo não aconteceu, por exemplo, no curso de Cálculo.* Em muitos cursos superiores, a disciplina de Cálculo é abordada como uma estrutura logicamente sistematizada, com a finalidade principal de apresentar uma teoria lógico-formal dedutiva; entretanto para Barufi (1999) as ideias principais deixaram de ter o merecido destaque. Concordamos com Barufi (1999) no sentido de que:

> Para os alunos, essa perspectiva não tem sentido, ainda mais se pensarmos quantos deles, que frequentam o curso de Cálculo, sequer enveredarão pelo caminho da matemática pura. Mesmo para esses, num curso inicial de Cálculo, não faz sentido centrar o enfoque num universo rigoroso e distante, onde não conseguem exercer qualquer tipo de crítica (BARUFI, 1999, p. 150).

Podemos e devemos considerar a importância da disciplina de Cálculo nos cursos universitários, pois aparece como componente curricular obrigatória em muitos deles, como já comentamos. Isso ocorre porque conhecimentos de Cálculo servem para o estudo de outras disciplinas na matriz curricular dessas várias graduações. Ademais, também sabemos que Cálculo é importante para outros profissionais pela gama de problemas aplicados e práticos, onde constatamos que conceitos dessa disciplina se fazem necessários, ou seja, poderíamos até dizer que é indispensável para muitos profissionais e muitos cursos universitários. Essa relação estreita entre o conhecimento do Cálculo e suas aplicações poderia ser o grande motivo para a integração real e interdisciplinar trazendo à tona seu verdadeiro potencial e grandeza. *Dessa forma poderíamos pensar em sair do contexto lógico-formal rigoroso, onde a matemática domina, e entrar-se-ia num contexto onde a realidade com seus problemas fundamentais são mais importantes* (BARUFI, 1999, p. 152).

A pesquisa de doutorado de Rezende (2003) nos ajudou na reflexão de que alguns problemas do fracasso do ensino do Cálculo se apresentam desde o início. As dificuldades de aprendizagem não podem ser consideradas apenas de natureza psicológica de um ou mais conceitos específicos do Cálculo. Contrariando essa tendência, em sua pesquisa, Rezende (2003) mostra que parte importante dos problemas de aprendizagem do atual ensino de Cálculo é de natureza epistemológica, está longe dos procedimentos e das metodologias, vindo até mesmo antes de sua realização. Nesse aspecto, Rezende (2003) afirma que:

> ...o aluno não aprende não é porque não possui “estruturas cognitivas” apropriadas ao desenvolvimento de determinados conceitos, mas, isto sim, porque ainda não construiu os nós e os feixes de relações de conhecimentos necessários para se estabelecerem novas conexões e a incorporação de novos nós à rede já construída. A rota a ser seguida, nesse caso, não é a história individual e psicológica do aprendiz, mas a das redes de conhecimentos construídas pelo “sujeito normal” no processo didático e não as circunstâncias particulares de cada aprendiz em casos específicos (p. 56).

Vale lembrar que as estruturas cognitivas exigidas dos alunos para a compreensão de conceitos matemáticos do ensino superior são estabelecidas por deduções lógicas e abstratas, ou seja, os universitários precisam manejar suas definições de várias formas, reconstruindo novos conceitos, ou novos nós à rede de conhecimento matemático que já haviam adquirido anteriormente na educação básica. Portanto, devemos considerar que, além de fatores psicológicos e epistemológicos, precisamos ainda considerar os emocionais que se relacionam com aspectos cognitivos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem (GÓMEZ CHACÓN, 2003).

Na tentativa de resolver ou amenizar as dificuldades apresentadas por estudantes universitários na disciplina de Cálculo, dentro do contexto pedagógico, alguns professores universitários e estudantes acreditam em algumas soluções ditas “normais”. Rezende (2003), em sua tese, apresenta algumas dessas técnicas utilizadas pelos professores:

> A produção de listas de exercícios é sem dúvida a solução “normal” mais usual em nossas universidades: já faz parte da tradição de um curso de Cálculo a presença de extensas listas de exercícios, com gabarito, para que os alunos possam realizar o seu “treinamento” com segurança. A tal lista tem ainda o papel de prenunciar o contexto em que se dará a avaliação, fato, aliás, que muito interessa aos estudantes, e que poderá, inclusive, ser usado por eles em um momento futuro, numa contra argumentação de uma “questão da prova” que fuja aos parâmetros da lista. Outra solução “normal” diz respeito ao uso de computadores em trabalhos complementares ou mesmo em atividades na sala de aula. São inúmeros os exemplos de instituições universitárias que vêm implementando laboratórios de informática como apoio às disciplinas de matemática (p. 15).

Todas as técnicas citadas são válidas. Mas, mesmo concordando com o autor, não podemos esquecer que, além de procurarmos iniciativas que possam amenizar as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem dos educandos, será necessário definir o que queremos que os alunos aprendam e qual o papel que essa disciplina assume dentro do ensino superior.

Outra solução apresentada é a criação de cursos paralelos ou anteriores ao de Cálculo I que podem vir a ajudar os alunos a suprirem algumas dificuldades da matemática básica. Esses cursos chamados de pré-cálculo, cálculo zero, projeto de cálculo também, segundo Rezende (2003), não contribuem significativamente para o sucesso dos alunos na disciplina inicial de Cálculo I.

> O campo semântico das noções do Cálculo tem muito mais a ver com as noções de “infinito”, de “infinitésimos”, de “variáveis”, do que com “fatoração de polinômios”, “relações trigonométricas”, “cálculos algébricos”, etc. É bem verdade que o conhecimento destes últimos auxilia na árdua tarefa de calcular limites (derivadas, integrais, etc.), mas é exatamente aí que se coloca a nossa primeira questão fundamental: Qual é o curso de Cálculo que se quer? Aquele em que prevalece a técnica? Ou aquele em que se busca a construção dos significados? Quando se fala de “falta de base”, de que “base” se está falando? (REZENDE, 2003, p. 18).

A partir de reflexões já apontadas e de uma experiência realizada no IFES, Campus Itapina, com turmas de Cálculo I, temos constatado que, mesmo em disciplinas específicas de revisão de matemática básica, como, por exemplo, a disciplina de Cálculo 0 (Cálculo Zero), ou a disciplina de Pré-cálculo, os universitários não demonstram um bom desempenho. No trabalho realizado em 2013/1, em uma turma de dependência de Cálculo I, os estudantes solicitaram que não fizéssemos novamente essa revisão da matemática do ensino médio de maneira isolada no início do semestre, como havíamos feito no semestre anterior. Em seus relatos, disseram que as revisões de conteúdos matemáticos de ensino fundamental e médio desconectadas dos conteúdos estudados em Cálculo não ajudam para que eles compreendam os conceitos e notem relações entre os mesmos. Quando os conteúdos da matemática básica são revisados meses antes de iniciar os conteúdos específicos de Cálculo, eles não conseguem fazer a ligação entre o conteúdo do ensino básico com o do ensino superior. Em suas falas, eles demonstravam uma preocupação maior em conseguir compreender e aprender os conteúdos próprios do Cálculo, como limites e derivadas.

Em sua tese de doutorado, Domingos (2003) caracterizou a compreensão dos conceitos matemáticos avançados ensinados no início do ensino superior, relacionados com os conteúdos de sucessões, funções e cálculo diferencial. Seu foco de estudo foi essencialmente as abstrações de definições e deduções e que têm por base os processos de representação e abstração de conceitos matemáticos no ensino superior. O trabalho de Domingos (2003) trouxe alguns resultados importantes sobre a utilização do conceito de derivada por alunos que eram considerados bons. Foi possível identificar um bom domínio de alguns objetos matemáticos, quando o conceito de derivada era descrito por uma expressão algébrica que define a razão incremental entre dois pontos, e a interpretação geométrica da derivada a partir da declividade da reta tangente ao gráfico. Entretanto, quando o conceito de derivada era abordado como o limite da razão incremental, os alunos revelaram uma interiorização fraca, que não ia além da utilização de alguns procedimentos e processo elementares.

Uma questão que se coloca, a partir desses fatos, é que os conceitos elementares não são utilizados e relacionados como objetos matemáticos. Isso dificulta a construção de novos conceitos matemáticos pelos estudantes. De fato, conceitos como função, sucessões e derivada são usados apenas do ponto de vista operacional, pois os procedimentos e processos associados aos seus conceitos são pouco coordenados com vista à formação de novos objetos mais eficazes para facilitar a sua compreensão.

Outra questão apontada por Domingos (2003) está relacionada com o desempenho dos alunos universitários na realização de processos algébricos. Embora alguns resultados sejam satisfatórios, os alunos continuam a revelar grandes dificuldades na realização de procedimentos rotineiros. Por exemplo, estudantes sentem dificuldades no cálculo algébrico de limites, nas operações com funções envolvendo módulo ou no cálculo de determinados pontos críticos de funções. Tal desempenho parece pautar-se no fato de haver uma tendência para memorizar os processos, ao invés de estes serem realizados com base na compreensão de seus pressupostos.

Parece-nos, assim, que talvez os estudantes tenham aprendido esses conceitos de forma instrumental. Se isto ocorreu podemos supor que, provavelmente, seus professores de ensino fundamental, médio e superior abordaram, ensinaram e avaliaram os conceitos matemáticos de forma instrumental como comenta Skemp (1976). Podemos supor, também, que pouco ou nada aconteceu em aulas de matemática para permitir que os estudantes adquirissem e construíssem um entendimento relacional dos conceitos matemáticos mencionados. Esse autor nos chama a atenção de que deveríamos ensinar matemática que propiciasse aos alunos tanto entendimento instrumental quanto relacional. Ademais, Skemp (1976) asserta que professores também deveriam explorar em exercícios e avaliações tarefas matemáticas que envolvessem os dois tipos de entendimento matemático. Segundo esse autor, apenas quando professores trabalharem com ensino de matemática que propicie aos estudantes adquirirem entendimentos instrumental e relacional nós, professores, teremos alunos compreendendo e resolvendo problemas e tarefas matemáticas rotineiras e não rotineiras.

Outros resultados para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos em nível avançado, provenientes desse estudo de Domingos (2003), estão diretamente ligados com a capacidade de abstração manifestada pelos universitários. Quando a abordagem dos conceitos está centrada em objetos concretos e passam a operar com outros mais abstratos, os alunos demonstram grandes dificuldades. Por exemplo, usar e compreender as definições simbólicas de sucessão convergente, e também calcular limite de uma função tendendo ao infinito são atos novos, complexos e abstratos para alguns universitários que estavam acostumados a entender conceitos matemáticos relacionados com objetos concretos na educação básica.

Lecionar a disciplina de Cálculo em cursos de serviços é sempre muito desafiador, especialmente quando o professor precisa decidir sobre aspectos rigorosos e outros intuitivos do ensino dessa disciplina. Acreditamos que nossa formação matemática e nossa experiência lecionando essa disciplina influenciaram diretamente em nossas decisões. Portanto, é importante o professor refletir sobre o seguinte questionamento: qual é o curso de Cálculo que queremos para nossos estudantes? Como tínhamos consciência de que estávamos fazendo uma pesquisa em um curso de serviço, inicialmente acreditávamos que seria melhor optar por um curso que privilegiasse a intuição dos conceitos de Cálculo.

A tese de doutorado de Reis (2001), cujo objetivo foi discutir as relações existentes entre o rigor e a intuição no ensino de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática na universidade, ajudou-nos a compreender como o professor pode proceder diante dessa dicotomia rigor/intuição. Segundo Reis (2001, p. 24), no ensino de Cálculo atual, *os temas são abordados sob uma perspectiva aplicativa, com a interpretação das noções. Na Análise são abordados, geralmente, sob uma perspectiva lógico-formal, com a definição rigorosa dos objetos estudados*. No entanto, *isso não significa que no ensino de Cálculo deve acontecer a transição de um pensamento mais intuitivo para um pensamento mais rigoroso* (REIS, 2001, p. 201).

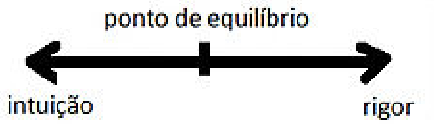
Acreditamos que existe certo nível de rigor, quando definimos, mesmo de maneira intuitiva, os conceitos elementares do Cálculo. Cremos que é importante considerar, nesse processo intuitivo de ensino dos conceitos básicos do Cálculo, as concepções espontâneas[9] (CORNU, 1991) e imagens conceituais[10] (TALL; VINNER, 1981; DOMINGOS 2003) dos estudantes relacionadas aos conteúdos, *os quais deverão ser sistematizados mediante um processo de rigor compatível, podendo este ser lógico-formal ou exploratório* (REIS, 2001, p. 202). Ao finalizar seu estudo, Reis (2001) concluiu que, em nenhum momento, por mais que o professor tente, provavelmente, ele não conseguirá atingir um estado de puro rigor ou um estado de pura intuição em suas aulas (ou em seus procedimentos de ensino). Para Reis (2001), se considerássemos uma metáfora de uma reta com dupla seta, onde, numa extremidade poderia se representar a intuição e, na outra, o rigor teríamos a Figura 1.

---

[9] *São concepções que os alunos já possuem a partir de certo número de ideias, intuições, imagens, conhecimentos que vêm da experiência cotidiana. Essas concepções ocorrem antes do ensino formal* (CORNU, 1991, p. 154).

[10] A partir do trabalho de Tall e Vinner (1981) compreendemos que as imagens conceituais ou imagens do conceito sejam todas as imagens mentais que um indivíduo faz de um determinado conceito. Essas imagens vão se transformando e/ou consolidando de acordo com as experiências do sujeito (TALL; VINNER, 1991). Segundo Domingos (2003, p. 27) *o conceito imagem é assim qualquer coisa não verbal associado na nossa mente ao nome do conceito. Ele pode ser uma representação visual interna do conceito, no caso destes ter representações visuais ou uma coleção de impressões e experiências*.

Figura 1 – Metáfora proposta por Reis (2001)



Fonte: Reis (2001, p. 202)

Segundo Reis (2001), o ideal é o professor encontrar um ponto de equilíbrio em seu trabalho docente, mas:

> [...] este, ponto, na verdade, é difícil de ser conseguido no ensino. O trabalho do professor pode situar-se em qualquer um dos pontos da reta contínua. O professor tem autonomia para deslocar-se para qualquer ponto dessa reta. Se o deslocamento tenderá a ser, com mais frequência, para esquerda (intuição), isso denota uma preocupação pedagógica mais voltada à produção de sentidos e significados e à formação de conceitos. Se o deslocamento for, com mais frequência, para a direita (rigor), isso poderá significar uma preocupação e uma ação pedagógica mais sintático-procedimental. Essas tendências, mais à direita ou à esquerda, dependem, de um lado, das concepções, valores e conhecimentos do professor e, de outro, das condições intelectuais dos alunos e materiais (aqui, entrariam os livros didáticos) da instituição (REIS, 2001, p. 202-203).

Acreditamos que o professor precisa inicialmente conhecer quais são os objetivos do curso, da instituição de ensino em que trabalha e, especialmente, quem são os estudantes universitários. Esses são fatores que podem ajudá-lo a decidir por qual metodologia seguir e implementar durante o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo.

3.2 ESTUDOS RELACIONADOS À ANÁLISE DE ERROS

> *Não há conhecimento matemático que não tenha passado por erros antes da sua consolidação* (PINTO, 1998, p. 48).

A análise de erros como uma abordagem de pesquisa em educação matemática, tem sido enfocada de diversas formas. Nas análises das respostas (certas e erradas) dos estudantes universitários, em questões que envolviam conteúdos de limites de funções reais, trabalhamos com o mesmo enfoque encontrado nos trabalhos de Borasi (1986a, 1987, 1989a, 1996), que foi um dos primeiros a chamar a atenção de professores e pesquisadores, para a necessidade e a importância de professores e alunos compreenderem e analisarem os erros que acontecem em tarefas matemáticas. Para Borasi (1989a), o erro tem sido usado como uma ferramenta poderosa para diagnosticar as dificuldades de aprendizagem em matemática. No entanto, a maioria desses estudos ainda compartilha uma concepção limitada, uma vez, que o erro é visto apenas como um sinal de que algo deu errado no processo de aprendizagem, e que se faz necessário, alguma remediação.

Borasi (1986a; 1989a) foi uma das primeiras pesquisadoras a destacar que o professor deve se questionar a respeito dos motivos do erro e do que pensou o aluno para resolver a tarefa comentando esse erro. Isto é, ela nos sugere que pensemos em responder e investigar questionamentos do tipo: Por que tal erro aconteceu? O que será que o aluno pensou? Como o aluno achou que poderia usar este procedimento errado?

Aprofundando seus estudos na história e filosofia da ciência, Borasi (1996, p.27) buscou ideias nos trabalhos de Kuhn (1970), Lakatos (1976) e Kline (1980)[11], para ter argumentos que convencessem a ela mesma e a outros pesquisadores de que seria relevante pensar o ensino de matemática *sobre uma visão humanística e construtivista da matemática e trouxe para a análise de erros questões desafiadoras, tais como: o que aconteceria se aceitássemos esse resultado? [ou] em que circunstância esse resultado pode ser considerado correto?* Além disso, Borasi (1986a) considerou que as contribuições filosóficas desenvolvidas por esses autores puderam ajudá-la a perceber que os erros têm um papel muito mais fundamental no desenvolvimento de uma disciplina e que podem funcionar como um trampolim para aprendizagem, *expressão usada por Borasi (1985)[12], ao introduzir uma coletânea de artigos sobre erros* (CURY, 2008, p. 37).

De acordo com Borasi (1987), a história da matemática, por exemplo, tem nos mostrado mais de uma vez que é possível aproveitar os erros de várias maneiras, independentemente de qualquer tendência, seja para não repeti-los ou eliminá-los.

[11] KUHN, T. **The structure of scientific revolutions**. Chicago: University of Chicago, 1970.
LAKATOS, I. **Proofs and refutations**. Cambridge: Cambridge University, 1976.
KLINE, M. **Mathematics the loss of certainty**. Oxford: Oxford University, 1980.

[12] BORASI, R. Using errors as springboards for the learning of mathematics; an introduction. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. 7, n. 3-4, p. 1-14, 1985.

Podemos considerar, como exemplo, a criação da geometria não-Euclidiana, que foi gerada por uma frustrada tentativa de querer “provar” o quinto postulado de Euclides, mais conhecido por axioma das paralelas. Borasi (1987) também citou os problemas e contradições encontrados no desenvolvimento inicial do Cálculo Diferencial e Integral, que motivaram os matemáticos a refletirem sobre a importância dos erros para evolução desse campo de conhecimento matemático.

> Os problemas e as contradições encontradas no início do desenvolvimento do cálculo também fornecem um exemplo muito interessante da função de erros na história da matemática. Na verdade, os erros cometidos inicialmente neste campo abalou a confiança dos matemáticos, a ponto de motivar uma revisão da metodologia utilizada na disciplina. (BORASI, 1987, p. 2)[13]. (Tradução nossa)

Para o desenvolvimento da matemática é importante à busca por um rigor, e nessa busca os matemáticos profissionais, fazem descobertas menos espetaculares, mas igualmente importantes para o crescimento do conhecimento matemático, cometem erros em suas conjecturas, que posteriormente eles conseguem ajustar, levantam suposições injustificadas e encontram resultados parciais que são importantes para criação de novos conhecimentos. Para Cury (1994, p. 227) *o trabalho do matemático não é infalível: ele pode ser um percurso sofrido, acarretar erros que só serão descobertos anos mais tarde, sofrer retrocessos e percalços, bem como surgir de intuição brilhante que apresenta soluções, mas não indica os caminhos.*

Nesse sentindo Borasi (1987) sugere que todos nós (professores e alunos) que trabalhamos com o conhecimento matemático, deveríamos fazer *o uso do potencial dos erros, tanto como trampolins para a resolução de problemas, mas como combustível para o pensamento crítico sobre a natureza da própria matemática* (BORASI, 1987, p. 2), e não só os gênios e os matemáticos profissionais. Essa pesquisadora sugere que:

[13] The problems and contradictions encountered in the early development of the calculus also provide a very interesting example of the role of errors in the history of mathematics. In fact, the errors made initially in this field shook mathematicians’ confidence to the point of motivating a revision of the methodology used in the discipline (BORASI, 1987, p. 2)

> Uma revisão da literatura sobre erros em vários campos (Borasi, 1986a; 1988)[14] sugeriu que educadores matemáticos não têm explorado completamente o potencial educacional dos erros. Professores de matemática, assim como pesquisadores na área, têm estado certamente preocupados com os erros dos estudantes por um longo tempo, e têm atribuído importância e valor considerável para aqueles erros como um meio para diagnosticar dificuldades de aprendizagem e sugerir estratégias efetivas para remediá-los (Radatz, 1979, 1980; Novak-Helm, 1983; CIEAEM, 1988)[15]. Embora essa abordagem de erros tenha fornecido contribuições valiosas para a educação matemática, ela também apresenta algumas limitações importantes. Na interpretação de erros como ferramentas para diagnóstico e remediação, apenas professores ou pesquisadores, e não os estudantes eles próprios, estão envolvidos na atividade criativa de analisar erros. Além disso, a amplitude da análise de erros está estritamente focalizada em eliminar o erro (BORASI, 1989a, p. 1).

Além disso, essa autora ainda destaca como é importante que professores e estudantes procurem interpretar e analisar erros, porque esse tipo de tarefa funciona como um trampolim para a investigação a respeito de erros para professores e estudantes. Ademais, ela ressalta que se os estudantes envolverem-se nessa tarefa de análise de erros eles poderão perceber que isso pode funcionar com um trampolim para a aprendizagem deles. Podemos perceber que professores e pesquisadores têm detectado os erros e pensam a respeito dos mesmos apenas como diagnóstico de dificuldades de aprendizagem e que precisam ser remediados, corrigidos e eliminados. Entretanto, Borasi (1989a) já afirmava que professores não usavam todo o potencial educativo que os erros podem ter nos processos de ensino, aprendizagem e avaliação e precisam fazer nesses processos.

Ela também comenta que *o aluno não tem exercido nenhuma função nessa interpretação e análise* (BORASI, 1989a, p. 4). A tese defendida por Borasi (1986a) é que os próprios alunos precisam exercer a atividade de tentar “explicar” e “corrigir” os seus próprios erros, e que nós professores precisamos criar situações que os tornem observáveis para eles. Foi nessa perspectiva que utilizamos a análise de erros em nossa investigação.

---

[14] BORASI, R. **On the Educational roles of mathematical errors:** Beyond diagnosis and Remediation. Ph. D. Dissertation, State University of New York at Buffalo. New York, 1986a.

[14] BORASI, R. Alternative perspectives on the education uses of errors. In: 39TH MEETING OF THE COMMISSIONE INTERNATIONALE POUR L’ETUDE ET I’AMEHORATION DE L’ EINSEGNEMENT DE LA MATHEMATIQUE**, Proceedings** [forthcoming**]** **…**, 1988.

[15] Radatz, 1979, 1980; Novak-Helm, 1983; CIEAEM, 1988.

A partir do momento que nós, professores, envolvemos os estudantes nesse processo de análise de seus erros, segundo Borasi (1986a, 1986b) essa ação mostrou-se altamente motivadora e desafiadora, como dispositivo inspirador e como ponto de partida para explorações matemáticas criativas, envolvendo valiosas soluções de um problema, ou mesmo para problematização da atividade. Por isso, é importante escolhermos erros adequados para usar como ponto de partida para reflexões e explorações. De posse desses erros isolados ou grupos de erros com as mesmas características, nos (professores e alunos) temos a possibilidade de fazermos uma avaliação mais profunda, completa e consciente de determinado conteúdo matemático, bem como da natureza da própria matemática e do seu ensino.

Trazemos, também, em nossa pesquisa, algumas reflexões sobre o papel do erro para professores e alunos. Por exemplo, passamos a refletir quando formulávamos uma questão em que os objetivos não estavam claros, ou, até mesmo, quando trazíamos questões nas avaliações que não eram coerentes com o tipo de questões que trabalhadas em aula. Porque constatamos que essas práticas avaliativas estavam incoerentes com o que tinha sido trabalhado na prática docente como assevera Santos (1997). Isso se apresentava como uma das evidências da participação do professor na produção do fracasso desses estudantes universitários. Por isso, foi fundamental, em nossa pesquisa, refletir com nossos alunos acerca de qual seria a origem desses erros. Ou seja, qual seria a parcela de contribuição e/ou responsabilidade que cada um, professor e aluno, envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, poderiam ter sobre esses erros cometidos pelos estudantes.

A tese de Pinto (1998) nos ajudou a compreender que o erro cometido pelos estudantes era observado por nós, professores, como um indicador do mau desempenho do aluno, sem jamais ser utilizado para o redimensionamento do ensino. Aquilo em que acreditávamos era o ensino como uma "*pedagogia da resposta"* (PINTO, 1998, p. 8), *em que o erro era o sintoma visível do fracasso do aluno, tal como o acerto era o sinal mais evidente do seu sucesso*. Percebíamos que, se quiséssemos ajudar esses estudantes repetentes, era necessário rever nossas crenças e concepções (ERNEST, 1989) em relação ao processo de ensino e aprendizagem de matemática.

De acordo com Pinto (1998), em uma avaliação seletiva, o erro tem um papel delimitado pelos resultados obtidos pelo aluno, ao perder a função controladora, ele passa a assumir um papel relevante na aprendizagem, ou seja,

> O erro é um conhecimento. Ele mostra o caminho do acerto que já está ali embutido (PINTO, 1998, p. 10).

Notamos no desenrolar da pesquisa, que estávamos assumindo uma lógica em que o erro poderia ser uma oportunidade didática para o professor organizar melhor o seu ensino e preocupar-se também com a aprendizagem dos alunos. Enfim, acreditamos que passamos a atuar como um professor que não se limitava só com *o quê e com o como se ensina, mas também com quem aprende e, portanto, para quem se ensina?* (PINTO, 1998, p.10).

Acreditamos que essa foi uma das mudanças importantes que conseguimos observar em nossa postura exercendo ao mesmo tempo os papéis de professor e pesquisador, ou seja, passamos a nos preocupar com quem aprende e para quem estávamos ensinando a disciplina de Cálculo. Assumirmos essa postura reflexiva e questionadora não foi uma tarefa fácil, nem uma tarefa já conhecida por nós. Por que, quando questionávamos o que fazíamos em planejamentos, em aulas, em avaliações e como interagíamos com estudantes e por que agíamos de uma forma ou de outra, precisávamos estar abertos para reconhecer nossas falhas pedagógicas.

Essa nova postura que passamos a assumir só foi sendo construída a partir das inúmeras conversas com minha orientadora, com os colegas do doutorado, de maneira presencial quando nos encontrávamos na universidade ou mesmo via Skype. Essas reuniões presenciais ou online aconteciam geralmente duas vezes na semana e duravam em média quatro horas diárias. Nesses momentos de diálogo, estudo e discussão, todos nós éramos estimulados a refletirmos e questionarmos nossas posturas como professores e pesquisadores. Alguns detalhes desses encontros foram descritos no capítulo que destinamos a metodologia de pesquisa.

Fez-se necessário durante a pesquisa de doutorado refletir a respeito de nossas concepções a respeito de matemática, ensino, aprendizagem e dos papéis de professor e alunos na universidade. Assim, tivemos que alterar algumas de nossas concepções de professor universitário acerca de nosso papel ao ensinar e do papel independente do estudante em seu processo de aprendizagem. Por exemplo, foi necessário mudar o pensar e agir em sala de aula de Cálculo. Acreditávamos que, na universidade, o estudante era quem tem que se virar para aprender, e que o nosso papel de professor era simplesmente o de passar todo o conteúdo da melhor maneira possível, pensando que todo o resto seria de responsabilidade do aluno. De acordo com Pinto (1998) é importante ter como princípio, em uma pesquisa, que:

> Cada professor, mesmo que não reconheça, alicerça sua prática em alguma teoria. À medida que ele se confronta com os vários problemas pedagógicos, essas teorias guiam suas decisões. Deixá-las vir à tona, para análise crítica e discussão, é uma maneira de poder examiná-las e discuti-las com seus colegas, além de possibilitar-lhe aperceber-se de suas falhas (PINTO, 1998, p. 13).

Na medida em que avançávamos na investigação, os problemas surgiam, sejam problemas ligados à aprendizagem de alguns conteúdos da disciplina de Cálculo, ou de ordem didática. Percebíamos, a partir das análises das respostas (acertos e erros) dos estudantes, nos instrumentos de coleta de dados e das reflexões que fazíamos sobre nossa postura, que algo precisava mudar. Todos esses pensamentos, reflexões e momentos de tomada de consciência nos conduziam a acreditar que a teoria de análise de erros era o caminho que devíamos seguir.

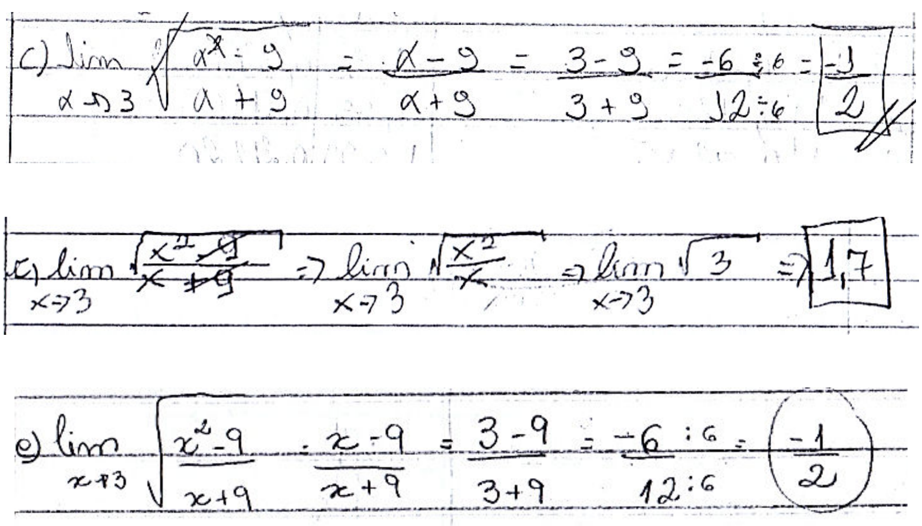
Essa pesquisa realizada por Pinto (1998) nos apontou a importância da utilização do erro como estratégia didática, pois, quando o erro é concebido numa dimensão construtiva, apresenta-se como uma oportunidade didática para o professor. Para essa autora, diagnosticar e corrigir os erros não são suficientes para a melhoria do ensino. A autora corrobora com todos os argumentos iniciados pelas pesquisas de Borasi (1986a, 1986b, 1996) a respeito de um uso precário dos erros dentro do processo de ensino se apenas os corrigimos e/ou tentamos eliminar. Os erros apresentam um potencial para a melhoria da aprendizagem do indivíduo e precisam ser explorados de outras formas, não somente pelo professor, mas, principalmente, pelo aluno como já advogava Borasi (1986a, 1986b, 1987).

Dentro dessa perspectiva, realizamos, com a turma da pesquisa, uma atividade na qual selecionamos questões e alguns erros na primeira avaliação sobre limite de funções. Nesta tarefa solicitamos que eles apontassem quais foram os erros por eles cometidos na referida questão e quais seriam as estratégias de ensino que eles apontariam para que fossem evitados em questões do mesmo tipo. Ainda, ficamos sem explorar e questionar os motivos que os levaram a cometer tais erros e o que os levou a pensar que tais procedimentos estavam apropriados como sugeriria Borasi (1996) e Pinto (1998). Mas já iniciamos um processo de tornar os erros observáveis para os estudantes.

Selecionamos, também, alguns erros de aritmética, de fatorações e simplificações algébricas para calcular os limites de algumas funções racionais. Nosso objetivo foi levá-los a identificar e analisar os tipos de erros cometidos pelos colegas nessa primeira avaliação e, com isso, fazê-los refletir sobre eles. Observamos se eles seriam capazes de identificá-los e levantar suas possíveis causas. Com essas informações em mãos, poderíamos tentar trabalhar o conteúdo, a partir de uma nova perspectiva.

Aqui neste capítulo decidimos mostrar na Figura 2 um exemplo de tarefa em que vários tipos de erros ocorreram. Para isso escolhemos o item (c) da primeira questão da prova de Cálculo I. Nosso intuito, neste momento, é trazer ao leitor alguns dos procedimentos adotados com a turma para que eles pudessem refletir sobre seus erros. As análises dos erros cometidos na resolução de limite de funções serão apresentadas no capítulo cinco desta investigação.

Figura 2 – Alguns erros cometidos pelos estudantes na primeira avaliação



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Esse foi um momento muito importante em nossa tomada de consciência sobre a utilização do erro como uma estratégica didática, pois, segundo Rico[16] (1995, apud PINTO, 1998), o ato de explicar e dar sentido a seus próprios erros é uma atividade altamente estimuladora e provocativa para os estudantes. Fazer com que os estudantes refletissem sobre seus erros era algo novo para nós, professores. O estudo realizado por Pinto (1998) mostrou-nos que:

> [...] mobilizar o professor para observar melhor o erro do aluno é instigá-lo a uma prática reflexiva em que possa desenvolver sua criatividade, seu espírito crítico e cooperativo, no diálogo com todos os agentes escolares, rompendo com o individualismo e a rotina e, ao mesmo tempo, criando os laços de confiança, necessários à sua autonomia docente (PINTO, 1998, p. 128).

Esse nosso novo olhar sobre as respostas dos estudantes, não só sobre seus erros, mas também sobre seus acertos, foi sendo construído ao longo da pesquisa. Estávamos conscientes de que precisávamos conversar, durante nossas aulas, sobre alguns erros que eles cometiam, pois precisávamos torná-los observáveis para eles. Fomos constatando que necessitávamos tornar esses erros observáveis e conscientes para todos nós. Isto é, necessitávamos observar, questionar e compreender motivos e causas a fim de ter consciência de porque estava errado resolver as tarefas de limites com tais procedimentos e assim procurar entender e aceitar que tais tarefas deveriam ser resolvidas de outra forma.

Dessa forma, teríamos a oportunidade de analisar, com esses estudantes, de forma consciente e crítica, os motivos e as causas da ocorrência desses erros. Para os pesquisadores Bortoloti, Ferreira e Santos-Wagner (2012, p. 3) essa forma de considerar o erro do aluno *envolve um trabalho reflexivo sobre a ação pedagógica, que transcende a correção de tarefas ao identificar acertos e erros que ocorrem em soluções de exercícios, atividades e/ou problemas matemáticos*. Entretanto, a investigação do erro só terá sentido se este tornar-se observável tanto para o professor quanto para o aluno.

---

[16] RICO, L. Erros y dificuldades em el aprendizaje de las matemáticas. In: KILPATRICK, J. GOMES, P e RICO, Luis. **Educación Matemática**. Colômbia: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995, p. 69-108.

Para Pinto (2000, p. 147), *para ser uma estratégia didática inovadora, o erro precisa ser um ente "observável" para o aluno. Porém, o erro não será um "observável" para o aluno, se, antes, não for um observável para o professor.* Tornar o erro um ente observável para o professor exige o desenvolvimento de novas competências profissionais e de novos olhares e questionamentos enquanto professores. Também exige uma abertura e desejo de arriscar a trabalhar com outras atitudes e práticas docentes.

A pesquisa realizada por Cury (1989) nos ajudou a compreender como nossas concepções de matemática podem influenciar na forma de considerar os erros dos nossos alunos. Segundo Cury (1990), ao analisar as provas e suas respectivas correções por parte de alguns professores, de uma turma da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, ela detectou três pontos de divergência. Observou que havia uma divergência de pontos de vista sobre a formulação das questões, os critérios de avaliação e a forma como os professores consideravam os erros dos alunos. O comportamento que nós, professores, tínhamos, no início dessa pesquisa, era o mesmo comportamento herdado de alguns de nossos mestres. Em nossas correções das atividades ou provas, só aceitávamos dois resultados possíveis, ou questão estava totalmente correta ou era considerada incorreta e atribuímos zero na questão. Não tínhamos a preocupação em considerar as etapas de resolução de uma questão. Por exemplo, se na resolução de um problema, fosse necessário fazer uma figura para representá-lo, e se o aluno conseguiu desenhar e aplicar corretamente os teoremas na resolução da questão, mas, se por um lapso errou no resultado final, avaliávamos como zero, todas as etapas corretas que o estudante tinha feito não era avaliadas.

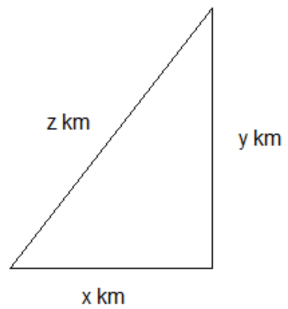
Muitos professores, de acordo com Cury (1990), mantinham uma postura demasiadamente rígida e, ao procurar justificá-las, fizeram as seguintes afirmações:

> [...] Mas esta é a maneira de avaliar que meus professores sempre usaram, foi assim que eu aprendi, ou então, nossa formação teve muita influência do formalismo, para nós uma demonstração só está certa se todos os passos foram justificados (CURY, 1990, p. 47).

Não estamos defendendo se essa postura está certa ou errada, ou mesmo, se existe uma mais correta do que outra. Precisamos discutir é que, dependendo da maneira como avaliamos as respostas dos estudantes, podemos estar perdendo a oportunidade de levá-los a refletir, questionar e assim, acabamos deixando de oportunizar a eles um processo de (re)construção de suas aprendizagens. No exemplo a seguir, trazemos uma correção que fizemos de uma questão aplicada em 2013 em uma avaliação sobre derivada com a turma do projeto piloto.

A questão era: Dois carros estão se encaminhando em direção a um cruzamento, um seguindo a direção leste, a uma velocidade de 90 km/h; e o outro seguindo direção sul, a 60 km/h. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro no instante em que o primeiro carro está a 0,2 km do cruzamento, e o segundo, a 0,15 km? (LEITHOLD, 1994, p. 202).

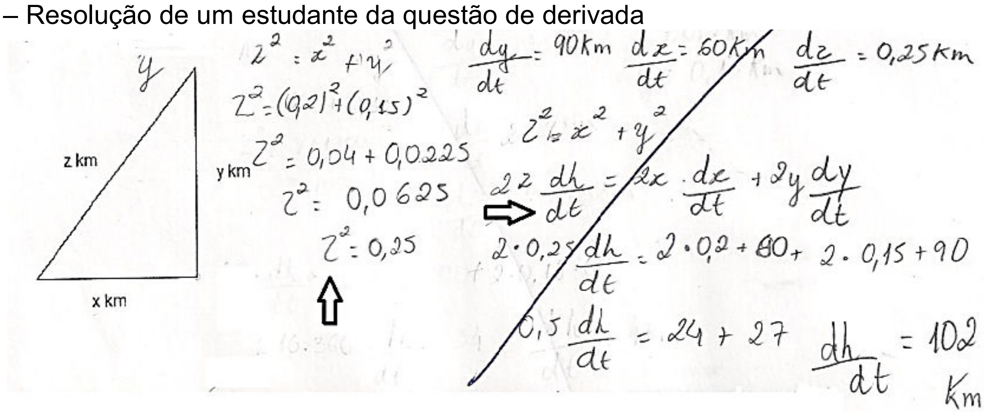
Figura 3 – Exemplo de questão da prova de derivada



Fonte: (LEITHOLD, 1994, p. 202).

A seguir, trazemos a solução de um estudante da turma de Cálculo I em 2013. Depois comentamos como procedíamos para corrigir tarefas matemáticas dos estudantes universitários. Assumir este risco de ter que olhar para trás em nossas práticas docentes para analisar e refletir a respeito de nossa postura ao corrigir tarefas avaliativas foi complexo e aconteceu lentamente. Acreditamos que aconteceu durante a pesquisa e fomos influenciados a refletir e questionar nossas práticas pelos diálogos com a orientadora e colegas de doutorado sobre nossos estudos e leituras.

Figura 4 – Resolução de um estudante da questão de derivada



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2013)

Na primeira análise da resolução apresentada por esse estudante, e por outros colegas que apresentaram soluções semelhantes, simplesmente marcamos com um traço dizendo que a resolução dele estava errada e atribuímos nota zero à questão. Mas, podemos observar que esse estudante acertou algumas etapas da questão. Esse é só um exemplo de como concebíamos as respostas. Não tínhamos um critério de correção definido, nem pensávamos em analisar os procedimentos desenvolvidos por cada estudante e de pontuar parte da resolução dele. Precisávamos abrir nosso olhar para a avaliação, suas funções, formas e critérios de correção e os possíveis papéis dos erros e indícios do que foi feito em cada questão como advoga Santos (1997).

O nosso único olhar era para a resposta final e se usou procedimentos de resolução como pensamos ao propor tal tarefa. Assim, ou a questão estava 100% correta e o estudante obtinha os pontos da mesma, ou tinha resposta diferente do gabarito, tinha erros e associávamos zero como a pontuação. Segundo Cury (1994),

> Acreditamos que os professores de Matemática formam ideias sobre a natureza da matemática, ou seja, concebem a Matemática, a partir das experiências que tiveram como alunos e professores, do conhecimento que construíram, das opiniões de seus mestres, enfim, das influências socioculturais que sofrem, durante suas vidas, influências essas que se vêm formando ao longo dos séculos, passando de geração a geração, a partir das ideias de filósofos que refletiram sobre a Matemática (CURY, 1994, p. 37).

Ao observarmos com cuidado e refletirmos a respeito de nossos procedimentos para corrigir essa tarefa acima e outras, podemos afirmar que de certa forma as nossas concepções da matemática e do seu ensino influenciaram nossas práticas e deixavam marcas como esse procedimento de correção usado até 2013. As mudanças nas práticas podem acontecer se o professor for capaz de refletir sobre as influências sofridas em momentos diferentes da sua vida profissional. Ter a maturidade e sensibilidade de perceber que é necessária alguma mudança na sua prática docente é algo próprio de cada professor e só vai acontecer se o professor assim o desejar e quiser correr os riscos dessa nova atitude profissional.

Ao direcionarmos nosso olhar para as pesquisas realizadas sobre análise de erros com estudantes universitários de cursos de serviços, encontramos o trabalho realizado por Cury (1990) com cerca de 450 alunos, de 13 turmas de Cálculo Diferencial e Integral A, que corresponderia ao nosso Cálculo I. Seu objetivo era analisar e classificar os erros cometidos em provas individuais e suas possíveis causas. Sua hipótese inicial era que as principais causas, em um determinado conteúdo estavam relacionadas, especialmente, com as dificuldades nos conceitos da matemática básica para a aprendizagem dos mesmos.

Para suas análises, Cury (1990) fez um levantamento das questões mais erradas em cada uma das três provas semestrais. Na primeira avaliação, em que geralmente são abordados os conteúdos de funções reais e gráficos, verificou-se que a maior dificuldade dos estudantes era com o reconhecimento dos gráficos das diversas funções básicas. O tema da segunda continha itens de derivada de funções, e as dificuldades dos estudantes acontecia com relação à aplicação das regras de derivação. Já na terceira, as dificuldades eram com as questões que solicitavam antidiferenciais.

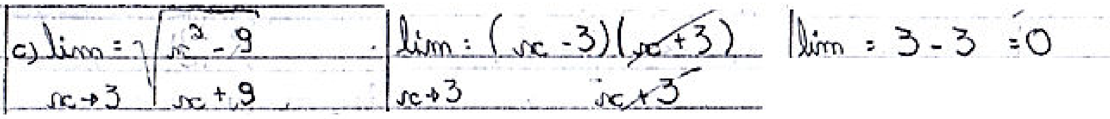
Trazemos aqui, com mais detalhes, a análise de uma questão referente ao limite de funções. Na segunda avaliação semestral para uma turma do curso de Engenharia Química, no primeiro semestre 2003, na PUCRS (Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul), foi aplicada uma questão sobre limite de funções, com o seguinte comando: calcule o $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)$. Essa avaliação foi aplicada para 41 estudantes, sendo que 37 deles erraram a questão. Em sua análise, Cury (2003) classificou os erros em quatro categorias:

> a) Aplicação não adequada das regras de L'Hôpital: tendo ou não substituído x por 1, ou seja, independentemente da existência de indeterminações dos tipos considerados no Teorema de L'Hôpital, os alunos derivaram numerador e denominador, obtendo então o valor 2 para o limite.
>
> b) Erros relacionados com conteúdos de álgebra do ensino básico, ou seja, como fatoração, simplificação, produtos notáveis, propriedade distributiva ou conceito de potenciação. Os alunos parecem ter introjetado um "modelo", em que todo binômio em que um dos termos é o quadrado de uma variável e o outro é uma constante que deve ser fatorado como se fosse diferença de quadrados. Além disso, talvez lembrando uma espécie de "racionalização", alguns alunos multiplicaram numerador e denominador por x+1, efetuando os cálculos e obtendo um polinômio de terceiro grau no numerador e outro de segundo grau no denominador, "simplificando", após, o "x^2" do numerador com o do denominador, evidenciando o desconhecimento da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
>
> c) Erros relacionados com o conceito de limite: alguns alunos mostraram não ter compreendido o significado de limite pela direita, pois apenas substituíram x por um valor maior do que 1 (por exemplo, 1,1) e calcularam o valor numérico da expressão. Outro erro também relacionado com o conceito envolveu a substituição de x por +1 e depois por –1, como se a notação de limite à direita indicasse troca do sinal de x.
>
> d) Erros de cálculo nas substituições ou lapsos de escrita; nesse último caso, às vezes o aluno copia mal a lei da função, mas resolve o exercício corretamente (CURY, 2003, p. 6).

As categorias de erros apresentadas nos possibilitaram verificar que algumas das limitações que esses alunos do curso Engenharia Química apresentavam, eram semelhantes às dos nossos alunos do curso de Engenharia Agronômica. Por exemplo, quando Cury (2003) destaca que os alunos parecem ter introjetado (interiorizado) um "modelo" de resolução para operar com alguns binômios. Ao olharem para um binômio, em que um dos termos era o quadrado de uma variável e o outro era uma constante, eles acreditavam que, para resolver a tarefa, deveriam fatorar, como se estivesse envolvendo uma diferença de quadrados. Parece que os estudantes não analisavam se isso era apropriado ou conveniente na tarefa dada.

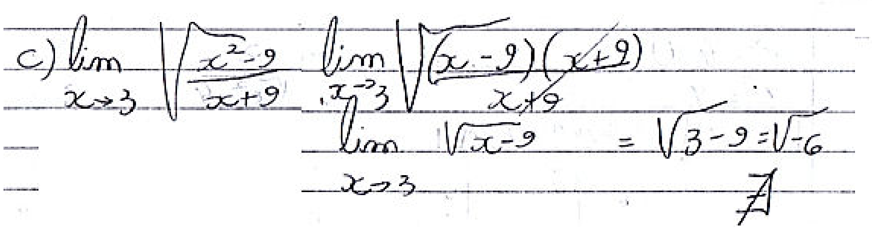
Constatamos, em nosso estudo de doutorado, algumas resoluções semelhantes. Observamos que os estudantes criavam modelos de resoluções, em que procuravam adaptar ou forçar alguma manipulação algébrica, quando identificavam a necessidade de fazer algum procedimento para simplificar a função. Esse tipo de comportamento apareceu na solução dos estudantes A12 e A17, respectivamente, da nossa pesquisa, na resolução do limite abaixo.

Figura 5 – Solução da questão 1 da primeira prova de limites do estudante A12



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Figura 6 – Solução da questão 1 da primeira prova de limites do estudante A17



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Observe que, na resolução do estudante A12, ele fatorou o numerador corretamente, pois se tratava de uma diferença de quadrados. Entretanto, para o denominador, tentou criar alguma manipulação algébrica errada para poder simplificar com o numerador e, também, ignorou que a função envolvia um radical. Ele resolveu tudo deixando isso de fora em seus cálculos do limite solicitado. Na solução do estudante A17 a fatoração do numerador estava errada, mas percebe-se que ele tentou fazer uma manipulação dos fatores de maneira que ele pudesse simplificar algum fator do numerador com o do denominador. Esses são erros comuns nas soluções de limites de funções racionais em que, de alguma maneira, os estudantes precisam simplificar as funções.

Para Cury (2003, p. 8), são nesses instantes que *temos a possibilidade de verificar quais são as "travas" ao raciocínio e o que podemos fazer para questioná-lo, oportunizando ao aluno dar-se conta dos próprios erros*. Essas limitações com a matemática básica, somando-se com as dificuldades de abstração e generalização[17], cooperam para que ocorram reprovação e repetências das disciplinas de matemática. Para algumas definições e conceitos utilizados em limites de funções e na resolução de alguns problemas, os estudantes necessitam

---

[17] *A generalização implica a identificação de elementos comuns ou de um padrão, permitindo a expansão de domínios da validade* (NASSER; SOUZA; TORRACA, 2012, p. 94).

desenvolver a abstração e generalização. Eles devem perceber que não basta verificar uma afirmativa para alguns exemplos, mas é preciso justificá-los de modo genérico, podendo-se chegar à abstração para casos mais gerais. Por exemplo, poderíamos questioná-los: Dada uma função cujo $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ela será sempre contínua? Nós sabemos que essa afirmativa não é verdadeira, uma vez, que essa não é a única condição para que uma função seja contínua em um determinado intervalo.

Para Nasser, Souza e Torraca (2012, p. 94), *a habilidade de abstração deve ser desenvolvida desde os primeiros anos de escolaridade. Os conceitos de número, reta e quadrado são exemplos de objetos matemáticos que dependem de abstração.* Segundo Tall (1991), os estudantes universitários devem construir entidades abstratas, por meio de deduções a partir de definições formais.

A análise de erros pode se tornar relevante em quaisquer situações de aprendizagem, desde que algumas premissas básicas sejam levadas em consideração. De acordo com Cury (2004), é necessário:

> a) respeitar o aluno, devolvendo a ele a análise feita e discutindo os resultados, com o objetivo de explorar suas próprias potencialidades;
>
> b) planejar estratégias para trabalhar com conteúdos em que haja maior incidência de erros, propondo questões que envolvam o interesse dos alunos;
>
> c) aproveitar recursos disponíveis (jogos, material concreto, computadores) para retomar os conteúdos de formas variadas, explorando habilidades de formular hipóteses, testá-las e discuti-las;
>
> d) para cada questão proposta, ou tarefa solicitada, fazer uma análise crítica dos erros que surgem, com o grupo de alunos, para aproveitar todas as oportunidades de fazê-los pensar sobre seu próprio pensamento;
>
> e) construir, com os alunos uma tabela com os principais erros obtidos, anotando a solução correta (CURY, 2008, p. 17).

Essas são características importantes e indicam alguns cuidados que devemos ter ao trabalhar com análise de erros. Além disso, com a perspectiva de respeitar a privacidade do aluno, é importante tomarmos cuidado em como tornar um erro observável para os estudantes em momentos de aula quando discutimos alguns procedimentos usados por eles em listas de exercícios e em itens de provas. Ou seja, ao analisarmos os erros de um estudante com a turma, devemos procurar não identificá-lo, pois isso pode atrapalhar sua autoestima e a confiança em aprender. Portanto, o professor tem que encontrar um caminho para abordar e comentar algumas especificidades e, deve fazer isto de maneira bem tranquila, evitando a exposição desnecessária do autor. Esse cuidado deve ser tomado porque se expormos o estudante corremos o risco de perder o potencial de usar erros como trampolim de aprendizagem para ele e para outros que pensem e resolvam de forma semelhante tal tarefa. Se nós expusermos desnecessariamente o erro de um aluno sem esses cuidados ou o deixarmos inseguro, podemos perder o interesse dele e corremos o risco de atrapalhar o processo de aprendizagem dele como argumenta Gómez Chacón (2003).

Enfim ao comentarmos acerca de determinado erro poderemos perder essa oportunidade de usarmos erros como trampolim de questionamentos (investigações) e trampolim de aprendizagem como dizia Borasi (1985, 1987) se, em algum momento de aula, um estudante se sentir inferior aos colegas. Por isso, é importante termos um diálogo bem franco e respeitoso com todos os envolvidos a respeito do que significa acertar ou errar uma tarefa em matemática.

Devemos mostrar aos estudantes que não existe somente o erro por parte do aluno. Também precisamos e temos de considerar o grau de dificuldade da questão, a maneira como o conteúdo envolvido na questão foi trabalhado em sala de aula e foi cobrado em listas e provas, fatores esses que dizem respeito a forma de ensinar e avaliar do professor (SANTOS, 1997). Além desses, ainda existem fatores emocionais que podem emergir no momento de resolução da questão, especialmente em uma avaliação. Portanto, é importante expor para os alunos que pode ocorrer uma série de fatores que podem direcioná-los ao erro.

A pesquisa realizada por Cavasotto (2010) sobre as dificuldades de aprendizagem de Cálculo, cujo subtítulo é *o que os erros cometidos pelos alunos podem informar*, teve como objetivo principal verificar e classificar as dificuldades de aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral dos cursos de Engenharia na PUCRS. Procurou classificar os erros cometidos na disciplina de Cálculo, estabelecendo uma relação com os conteúdos estudados nos níveis fundamental, médio e superior ou como erro de interpretação.

Os dados analisados foram as atividades de "*sondagem*"[18] da turma, as avaliações semestrais e os questionários respondidos pelos estudantes, monitores da disciplina e professores. Nesse processo o autor priorizou o uso de questões que abordavam, principalmente, simplificações algébricas, conteúdo importante para a disciplina de Cálculo I. As avaliações analisadas semestrais contemplavam os conteúdos de vetores, funções reais, limites de funções, continuidade e as principais técnicas de derivação.

Na avaliação sobre vetores, os erros mais frequentes ocorreram na utilização de fórmulas equivocadas e no desenvolvimento do produto escalar. Também em algumas estratégias equivocadas de resolução, decorrentes de dificuldades na leitura e interpretação do enunciado. As análises das respostas dos estudantes, na avaliação sobre funções, apontaram dificuldades em relacionar os conceitos de domínio e imagem. Esse estudo de Cavasotto (2010) identificou também limitações nos reconhecimentos das funções elementares e erros no desenvolvimento das operações com números reais.

A respeito do tema da segunda avaliação: limite de funções, em que as questões exigiam o cálculo de limite da função a partir do seu gráfico, Cavasotto (2010) apenas quantificou os acertos e erros. Justificou, na pesquisa, ter optado por essa quantificação por envolver respostas diretas, em que não havia um desenvolvimento para analisar com reflexão sobre as possíveis causas dos erros cometidos. No cálculo dos limites de funções racionais, os erros detectados foram de operações elementares de sinais no trabalho algébrico e, principalmente, nas simplificações. Foram poucos os erros encontrados por falta de conhecimento específico de limites. Nas questões envolvendo aplicação do conteúdo de derivada, ocorreram erros em resolução de equações, de manipulação algébrica e de sinais, relacionados com o ensino fundamental. Os erros referentes ao nível superior se concentraram na opção

---

[18] Termo utilizado para a atividade diagnóstica, que foi aplicada na turma para verificar as dificuldades dos estudantes com alguns conteúdos da matemática básica.

de regra errada para derivar a função. Observou, ainda, que alguns alunos tentavam calcular a derivada usando limite de maneira inadequada.

Foram realizadas entrevistas com os estudantes, monitores e professores da disciplina de Cálculo, para tentar traçar o perfil dos alunos das engenharias da PUCRS e, também, para saber a opinião dos estudantes sobre as oficinas oferecidas pela instituição. O comportamento dos estudantes da pesquisa de Cavasotto (2010), com relação às aulas de monitoria, foi semelhante ao que acontecia com nossas turmas antes da pesquisa definitiva.

Poucos estudantes compareciam às monitorias, geralmente só nas aulas que antecediam às provas. A justificativa dos estudantes para esse não comparecimento nas aulas de monitoria era de que a metodologia adotada pelos monitores era a mesma que acontecia na sala de aula regular. O professor resolvia no quadro as questões, os estudantes copiavam, faziam alguns questionamentos pontuais, e todas as dinâmicas das aulas seguiam esse padrão.

Por todos esses argumentos e por nossas reflexões, decidimos que, em nossa pesquisa definitiva com a turma de estudantes repetentes, mudaríamos o foco das aulas e os procedimentos didáticos. Oportunizamos momentos em aulas para os estudantes falarem mais e oferecemos a eles alguns momentos de troca de experiências com outros colegas. Os estudantes eram estimulados a resolver as questões no quadro para trazerem seus questionamentos.

Ademais, nós, professores, oportunizávamos momentos de estudos em grupos e discussões no final de cada aula a respeito dos principais pontos sobre os quais eles tinham dúvidas. Em nossas aulas de reforço no horário de contraturno, procurávamos seguir outra lógica de trabalho, em que o estudante tinha que construir o caminho para a sua aprendizagem. Isso motivou a turma a participar mais das aulas no contraturno. Traremos melhores detalhes desse assunto no capítulo de metodologia da pesquisa.

Na pesquisa de Cavasotto (2010), as perguntas direcionadas aos professores tinham a intenção de trazer o olhar do professor sobre as causas das dificuldades dos alunos na disciplina de Cálculo e sobre os serviços de apoio à disciplina. Os professores apontaram, como principal causa das reprovações na disciplina de Cálculo, a falta de conhecimentos preliminares e a falta de hábito de estudos. Com relação ao trabalho desenvolvido nas oficinas de apoio aos alunos, apontaram que houve algumas melhoras de aprendizagem. Para Cavasotto (2010), sua investigação permitiu concluir que o maior obstáculo enfrentado pelos educandos na disciplina de Cálculo não estava nos conteúdos específicos de Cálculo, mas, sim, nos conhecimentos da matemática básica, estudados nos níveis fundamental e médio.

Em nossa pesquisa de doutorado, com o objetivo de construir, com esses estudantes repetentes, um conceito de limite de funções que não fosse apenas intuitivo ou estritamente formal, procuramos analisar suas respostas, em diversas tarefas, como uma metodologia de ensino: utilizamos as respostas corretas, incompletas ou erradas dos alunos como trampolim para a aprendizagem (BORASI, 1985, p. 32). Fizemos isso, pois levamos esses estudantes a questionarem suas respostas, fossem elas certas ou erradas, na tentativa de desequilibrar suas imagens conceituais sobre limite e auxiliá-los a construir e/ou reconstruir imagens conceituais e a própria definição do conceito de limite, como sugerem Tall e Vinner (1981). Por exemplo, quando percebemos, na primeira atividade diagnóstica sobre limites de funções reais com a turma, que a maioria dos estudantes acreditava que uma simples substituição do valor numérico de x na função seria suficiente para calcular o seu limite. Usamos um contraexemplo para gerar neles um conflito cognitivo a respeito da substituição numérica para cálculo de limites (Ver detalhes no capítulo 5 deste trabalho.).

Interpretar um erro e utilizá-lo como trampolim para a aprendizagem exige de professores e alunos uma análise crítica e reflexiva sobre as causas desses erros. A esse respeito, Bortoloti; Ferreira e Santos-Wagner destacam:

> Professores e alunos precisam conversar sobre erros em aulas de matemática e analisar, de forma consciente e crítica os motivos para estes ocorrerem, e, assim, tentarem descobrir as causas para tais erros. Isso envolve um trabalho reflexivo sobre a ação pedagógica, que transcende a correção de tarefas ao identificar acertos e erros que ocorreram em soluções de exercícios, atividades e/ou problemas matemáticos (BORTOLOTI; FERREIRA e SANTOS-WAGNER, 2012, p. 4).

De maneira geral, ainda que nós, professores, consideremos as respostas certas ou erradas como uma maneira de mudar nossas estratégias de trabalho, para que o aluno construa novos conhecimentos, faz-se necessário ter um objetivo definido. Cury (2008) acredita que:

> Na análise das respostas dos alunos, ao considerar apenas a classificação e a contagem do número de respostas de cada tipo, a investigação fica muito pobre, não trazendo benefícios a alunos e professores. No entanto, ao procurar entender as formas como o aluno produziu a resposta, certa ou errada, o trabalho pode contribuir para a construção de novos patamares de conhecimentos (CURY, 2008, p. 63).

Nas etapas de análises das respostas dos alunos em nosso estudo de doutorado foi importante aprofundar e considerar vários aspectos. Dentre estes destacamos toda a bagagem de conteúdo matemático que o aluno trazia das séries anteriores, que se relacionava com o tema em estudo. Sabemos que vários dos conteúdos matemáticos poderiam e podem servir como pré-requisitos para a compreensão do assunto estudado em Cálculo I. Em nossa pesquisa usamos informações do trabalho de Cury (2008) quando nos informa que

> a intuição do pesquisador, orientada pelos objetivos da pesquisa, influencia (i) a maneira como selecionamos as respostas, (ii) o olhar criterioso do pesquisador em tentar verificar e compreender o que estaria por traz daquela resposta, e (iii) as concepções que o pesquisador tem sobre o assunto ao analisar os dados (p. 65).

As situações apresentadas anteriormente foram fundamentais para a compreensão dos dados que nos auxiliariam a responder às questões da pesquisa. Assim, tornou-se necessário compreender que, tendo esses objetivos bem claros, poderíamos, posteriormente, elaborar estratégias de ensino para ajudar os estudantes a superarem suas dificuldades e assim favorecer uma aprendizagem que pudesse levá-los a construir novos conceitos matemáticos.

3.3 ESTUDOS RELACIONADOS AO CONCEITO DE LIMITE E LIMITE DE FUNÇÕES REAIS

A tese de MURILLO (2004) sobre processos de construção do conceito de limite em um ambiente de aprendizagem cooperativo, debate científico e autorreflexão, considera que as noções fundamentais do Cálculo, derivada e integral, estão definidas em termos de limites. Por esse motivo, considera primordial a compreensão desse conceito. Algumas investigações preliminares acerca das dificuldades do conceito de limites por estudantes do ensino médio e na universidade evidenciaram a importância de se estudar em detalhes a construção que esses estudantes realizam acerca dos processos infinitos e suas aplicações. Sua pesquisa investigou as dificuldades de aprendizagens no processo de construção ou reconstrução do conceito de limite por estudantes de pós-graduação, que exerciam a função de professores de matemática da escola básica ou atuavam como professores de Cálculo.

Foram aplicadas na tese de Murillo (2004) atividades que incluíam diferentes representações do conceito de limite (gráfica, numérica, algébrica e linguagem natural), com a finalidade de criar um conflito cognitivo nesses estudantes de pós-graduação, de maneira que pudessem gerar discussões que induziriam a uma mudança de pensamento. Entre os diversos aspectos abordados por essa pesquisa, foi importante para nós ressaltar as dificuldades de aprendizagem do conceito de limite relacionadas com a forma de ensinar. Durante nossa prática de sala de aula, era comum iniciarmos o conceito intuitivo de limite, trazendo aspectos da vida cotidiana, de maneira que eles formassem imagens mentais a respeito desse conceito. Por exemplo, dizer que a ideia de limite é algo intransponível, que não podemos atingir que podemos nos aproximar cada vez mais, mas nunca alcançar.

Cornu (1981) já comentava sobre essa problemática como sendo uma linguagem comum de professores do ensino médio, para ensinar a ideia de limite e que, na tentativa de criar situações cotidianas para expressar a noção intuitiva de limite, que de certa forma, poderíamos causar outros problemas. Segundo esse autor essas situações exemplificadas no ensino médio pelos professores teriam possibilidades no futuro de prejudicar esses estudantes na construção da ideia intuitiva e na formalização do conceito de limite.

Com o trabalho de Murillo (2004), foi possível perceber que essa era uma dificuldade de aprendizagem relacionada com a forma de ensinar, portanto, para nossa prática, tratava-se de um obstáculo didático. Essas noções eram repassadas aos estudantes, por nós professores, sem nenhum tipo de reflexão, sobre como essas ideias poderiam atrapalhar esses alunos futuramente na construção do conceito de limite. Encontramos na pesquisa de Murillo (2004) um trecho que nos fez refletir muito a respeito das funções que propomos para nossos estudantes calcularem limites.

> Outra dificuldade que reportam Hitt & Lara[19] (1999) é que os professores induzem os alunos a desenvolver a ideia de limite como uma simples substituição, o que funciona para eles quando é necessário calcular, por exemplo, o $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$ e o $\lim_{x\to 2}\sqrt{x+2}$ [funções que são contínuas para x=1 e x=2, respectivamente]; no entanto, surgem problemas quando confrontados com o cálculo de, por exemplo, o $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ e o $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$. Isto quer dizer, se concentra em um aspecto mecânico que oculta o problema real para a construção do conceito de limite. Logo a pergunta é: Que outras dificuldades estão presentes [nas falas e tarefas matemáticas] de professores que provocam construções de concepções nos estudantes, que, posteriormente, se opõem à construção do conceito de limite? (HITT & LARA, 1999, apud MURILLO, 2004, p. 17). (Tradução nossa)[20]

O trecho que trouxemos da pesquisa de Murillo (2004), com os exemplos de Hitt e Lara (1999), nos ajudaram a pensar sobre os tipos de funções que propomos para nossos estudantes nas tarefas limites e que diálogos nós desenvolvemos ou deveríamos ter feito em aulas para que eles focalizassem atenção nos aspectos centrais de cada função ao calcularem seus limites. Nos dois últimos limites acima do trecho de Murillo (2004), onde a funções não estão definidas para x=0, o estudante enfrenta algumas dificuldades para iniciar seus procedimentos de Cálculos.

---

[19] HITT, F; LARA, H. Limits, continuity and discontinuity of functions from two points of View: That of the teacher and that of the student. **British society for research into learning mathematics**, Lancaster, U.K.,1999, p. 49-54.

[20] Otra de las dificultades que reportam Hitt y Lara (1999) es que los profesores inducen a los alumnos a desarrollar la idea de límite como una simple sustitución, la cual les funciona cuando se requiere calcular, por ejemplo, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$ e $\lim_{x\to 2}\sqrt{x+2}$,, sin embargo, los problemas surgen cuando se enfrentan al cálculo de por ejemplo, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ e $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$. Es decir, se enfocan a un aspecto mecánico que oculta el verdadero problema para la construccíon del concepto de límite. Luego, la interrogante es: ¿que otras dificultades están presentes en algunos profesores que provocan construcciones de concepciones en los estudiantes que, más adelante, se oponen a la construccíon del concepto de límite?

Isso pode ocorre nessas funções racionais do tipo, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ e $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$, em que não estão definidas em x=0, onde é solicitado o cálculo do limite. Além disso, os estudantes nem sempre observam que ao efetuar um cálculo de limite de funções desse tipo procurando algum procedimento mecânico em nada ou em pouco ajudam. Podemos perceber que para calcular esses dois últimos limites, requer que o estudante tenha adquirido nas aulas inicias de Cálculo vários conhecimentos e entendimentos a respeito de funções e de como calcular limites quando x é um valor fora do domínio da função. Quando analisamos esses exemplos de limites, nos questionamos: Quais definições equivocadas e explicações incompletas e/ou confusas nós professores apresentamos em nossas aulas de Cálculo pensando que auxiliávamos na construção do conceito de limite de funções, e que no futuro poderiam se opor a construção correta desse conceito?

As leituras, estudos e reflexões sobre o trabalho de Murillo (2004), não se restringiu apenas às questões relacionadas a esses problemas citados, mas também às dificuldades que esse conceito de limite pode causar nos estudantes. Nessa pesquisa houve um aprofundamento na definição formal de limite, porque os sujeitos eram professores de Matemática, estudantes de um curso de pós-graduação em nível de mestrado em Educação Matemática no México.

A pesquisadora conseguiu selecionar e analisar algumas atividades mais restritas, que representavam obstáculos para esse professor de Matemática que era naquele instante aluno de pós-graduação, mas que também seriam e são limitações na aprendizagem de alunos ingressantes na universidade. Em particular, podemos citar a noção intuitiva, a definição formal de limite e as principais representações (verbais, geométrica e algébrica) em uma variedade de situações. Segundo Murillo (2004), em suas conclusões, uma concepção coletiva e prévia do conhecimento de limite que é apresentado por calouros na faculdade e por estudantes na pós-graduação é a ideia de aproximação: o limite é o valor pelo qual estamos nos aproximando.

De acordo com o nível em que o estudante se encontra, teremos três níveis a respeito dessa ideia de limite como sendo uma aproximação (MURILLO, 2004). No primeiro nível, é a de uma simples aproximação, que não é errada, mas é imprecisa.

No segundo, está aquele estudante que tem o conceito de limite a partir da aproximação pela direita e pela esquerda de um ponto. Essa visão está um pouco mais refinada que a anterior, mas segue sendo imprecisa. O terceiro nível corresponde a uma ideia intuitiva de limite que fornece mais informações do que a anterior; e que está relacionada com a definição de Cauchy, a noção de aproximação tanto quanto você queira. Essa é uma ideia “dinâmica” que se contrapõe à ideia formal, que geralmente aparece na literatura como “estática”. A concepção de aproximação para definir limite é interpretada por outros autores como um obstáculo epistemológico (SIERPINSKA, 1985; CORNU, 1991) relacionado ao fato de "o limite é atingido ou não”.

Nossa pesquisa diferencia-se das demais apresentadas na revisão da literatura no aspecto de que apostamos e consideramos as variáveis afetividade e cognição como elementos indissociáveis nos processos de ensino, aprendizagem e avaliação de repetentes de Cálculo. Considerando essas duas variáveis, foi possível pensar em uma mudança de nossa postura como professor universitário, e conseguimos demonstrar para esses estudantes que estávamos preocupados com a aprendizagem deles e com o crescimento pessoal deles. Portanto, o nosso diferencial foi acreditar que existe um movimento dinâmico no cotidiano da sala de aula que mobiliza os aspectos afetivos e cognitivos envolvidos de todos os atores, professores e estudantes, e isso foi e é fundamental para pensarmos nos processos de ensino e aprendizagem de qualquer conteúdo. Por isso iniciamos nosso estudo procurando conhecer quem eram de fato os estudantes repetentes de Cálculo I (Ver detalhes nos capítulos 4 e 5).

3.4 ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Esta seção encontra-se organizada em quatro temas. No primeiro, voltamos o olhar para o ensino de matemática na graduação, tentando compreender o que ocorre com o processo de ensino de alguns conceitos matemáticos e o comportamento dos estudantes na passagem do ensino médio para o superior, com relação a hábito de estudos e a outros fatores que fazem parte da vida acadêmica. O segundo versa sobre pensamento matemático avançado, em que se espera do estudante uma nova postura, não só pelo rigor dos conceitos estudados na matemática do ensino superior, *mas que requer do aluno uma reconstrução cognitiva, levando a uma transição da descrição para definição, do convencimento para a demonstração* (NASSER; SOUSA; TORRACA, 2012, p. 93).

O terceiro versa sobre a compreensão relacional e compreensão instrumental de conceitos matemáticos, a partir da visão de Richard Skemp (1976). No quarto tema, trazemos uma discussão a respeito de afetividade e matemática, com intuito de refletirmos sobre o papel da dimensão afetiva na aprendizagem nesse nível de ensino. No ensino superior, constatamos que muitos professores não reconhecem que existe uma inter-relação entre aspectos cognitivos, metacognitivos (SANTOS, 1993, 1994, 1997) e afetivos (GOMÉZ CHACÓN, 2003) que podem influenciar a aprendizagem.

3.4.1 Passagem do Ensino Médio para o Ensino Superior

Nesta seção, nós trazemos algumas reflexões e preocupações com relação ao rendimento acadêmico de estudantes universitários na disciplina de Cálculo. Comentamos também a respeito do processo de adaptação dos estudantes na transição do ensino secundário (atual ensino médio) para o ensino superior.

O sistema de ensino superior no Brasil, nas últimas décadas, tem passado por mudanças significativas. O crescimento econômico do país, o aumento da população e da escolaridade obrigatória e algumas mudanças nas políticas públicas em relação ao acesso às universidades públicas e privadas têm possibilitado um aumento considerável da população universitária. O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) divulgou, em 2015, no portal da autarquia, na internet, o Censo da Educação Superior de 2014. Os dados apontam um aumento de 6,8% no número de matrículas em cursos superiores no país, as quais cresceram de 7,3 milhões, em 2013, para 7,8 milhões, no ano 2014. Parte dessa expansão se dá pelo aumento do número de matrículas na Rede Federal de Educação Superior, que cresceu 3,7% em relação ao ano anterior, com 1.180.068 matrículas. Além disso, em 2014, dos 3.110.848 estudantes que ingressaram em cursos de graduação, informam que 82,3% deles ingressaram em instituições privadas (2.562.306), enquanto apenas 548.542 estudantes ingressaram em instituições públicas.

Umas das consequências dessa grande quantidade de estudantes ingressando no ensino superior é a dificuldade de adaptação do estudante universitário ao contexto acadêmico. Portanto, nós, professores universitários, que trabalhamos com as turmas dos primeiros períodos, precisamos ter consciência disso, pois, durante essa fase, ocorre um processo de desenvolvimento e ajustamento acadêmico desse estudante.

A maioria dos estudantes que ingressa no ensino superior traz consigo uma expectativa positiva em relação a sua futura experiência acadêmica. E a discordância entre as expectativas, sentimentos e pensamentos e o que a universidade efetivamente pode oferecer gera uma fonte de dificuldades refletida na adaptação, na satisfação e no sucesso acadêmico (SOARES; ALMEIDA, 2001). Sabemos que existe uma crença de que as universidades podem antecipar sinais de mudança do mundo do trabalho e criar uma relação ótima entre as aprendizagens dos universitários e as expectativas dos empregadores. Num mundo extremamente competitivo, elas precisam se preocupar com o estudante universitário, com a qualidade do ensino e, especificamente, com a qualidade do ensino de Cálculo, disciplina presente em vários cursos de graduação. Para Barbosa (2001), uma qualidade importante da matemática é a sua aplicabilidade a uma ampla gama de usos em ciência, tecnologia, indústria e comércio. É por isso que é tão benéfica na prática, e tão fundamental no mundo de hoje, para acompanhar o rápido desenvolvimento das ciências e suas tecnologias.

Ao direcionar nosso olhar para o rendimento acadêmico de matemática nessa passagem do ensino médio para o superior, nós temos encontrado alguns indícios em trabalhos nacionais e internacionais. Por exemplo,

> O fraco conhecimento das matérias do próprio ensino secundário, sobretudo em Ciências e Matemática por parte de grande parte dos estudantes que ingressam no ensino superior tem sido visto como um dos mais preocupantes factores, facto que faz com que a transição seja não só desafiante mas até problemática (SITOE, 2014, p. 1).

Além desse argumento temos autores como Brolezzi (2003) que nos chama a atenção para outro aspecto da matemática no ensino superior ao afirmar que: *Na universidade, a Matemática adquire um caráter distinto. É cobrada dos estudantes uma experiência anterior que eles, em geral não têm* (p. 1). Os professores argumentam que os conhecimentos prévios dos estudantes são insuficientes para a compreensão e aprendizado da matemática em nível superior. Essa falta de base é apontada por pesquisadores como uma das causas importantes para o fracasso em disciplinas de matemática. Guzmán, Hodgson, Robert, e Villani (1998) constataram em pesquisa realizada com estudantes e professores sobre a dificuldade na passagem do ensino secundário para a universidade que:

> Aqueles envolvidos no ensino da matemática universitária nos primeiros anos estão frequentemente insatisfeitos com as fraquezas que percebem em seus alunos. (...) Eles lamentam sobre o pensamento e hábitos dos seus alunos em matemática, a falta de organização e rigor matemático deles, bem como a dificuldade deles em adquirir e consolidar conhecimentos por meio de trabalho pessoal (GUZMÁN *et al*, 1998, p. 5)[21]. (Tradução nossa).

Concordamos com esses posicionamentos dos pesquisadores e também argumentamos que a matemática assume um papel diferenciado no ensino superior, em que o estudante é conduzido a uma abordagem mais conceitual e abstrata, a exigência de conhecimentos e entendimento de fato de pré-requisitos do ensino básico é muito maior para os universitários. Outro fator relevante que devemos considerar, e que colabora para que a transição desses dois níveis de ensino se torne um obstáculo para os estudantes, é a falta de hábitos e de autonomia em relação aos estudos. Muitos desses estudantes esperam do professor universitário uma postura didática semelhante à que acontece com alguns professores do ensino médio, o *professor como transmissor de conhecimentos e o professor como fonte de respostas* (GÓMEZ-CHACÓN, 2003, p. 71). Além dessa problemática identificamos pesquisadores que apontam como central a falta de autonomia estudantil. Por exemplo, Guzmán e colegas (1998, p. 5), *Aquisição de certo nível de autonomia de*

---

[21] Those involved in the teaching of first-year university mathematics are often rather dissatisfied with the weaknesses they perceive in their students. (...) They lament over the thinking and working habits of their students in mathematics, their lack of organization and of mathematical rigour, as well as their difficulty in acquiring and consolidating knowledge through personal work.

aprendizagem é frequentemente visto por professores universitários como o principal obstáculo na passagem do secundário para o terciário[22].

Nós, professores universitários, cientes de que alunos ingressantes na universidade chegam com outras expectativas, têm dificuldades de adquirir autonomia para estudar e trazem lacunas de conteúdos matemáticos devemos pensar em estratégias alternativas. Quem sabe o caminho seria identificar, explorar, aproveitar e aprofundar a bagagem de conteúdos trazida por esses alunos e *incentivar atividades de Matemática Básica com os calouros das Universidades, visando preencher lacunas de aprendizagem e auxiliando na abstração necessária para o domínio do pensamento matemático avançado* (NASSER; SOUZA; TORRACA, 2012, p. 17).

Nessa fase, o estudante tem a oportunidade de passar por vários desafios provenientes de conflitos cognitivos frente à aprendizagem de matemática. Para Tall (1991), o foco principal da educação, no nível universitário, é iniciar o aluno em um mundo completo do matemático profissional. Segundo Dreyfus (1991), o curso típico de matemática, seja um curso de Cálculo, Álgebra, Matemática Finita, Métodos Numéricos ou outro, tem o programa de ensino bem conhecido para o professor. Isso é indiscutível. A estrutura lógica dos conteúdos e a metodologia a serem usadas seguem, em alguns casos, um padrão bem conhecido: definimos os teoremas, demonstramos e usamos exemplos de aplicações desses teoremas. Para Dreyfus (1991), essa maneira de lecionar tem várias vantagens, por exemplo, serve para estruturar bem o curso, delimitando o conteúdo e o tempo em que o conteúdo será trabalhado. Em contrapartida, é inflexível em termos de adaptabilidade aos alunos, podendo funcionar bem apenas para os alunos que dominam matemática, porque possuem um talento próprio para a matemática, ou porque já vivenciaram boas experiências matemáticas anteriormente. Esses procedimentos de ensino de muitos professores universitários acabam deixando de fora uma grande parte de estudantes que possuem apenas algum entendimento instrumental de conceitos

---

[22] Acquisition of a certain level of autonomy in learning is often seen by university teachers as the main stumbling block in the secondary-tertiary passage.

matemáticos, mas que seguem sem ter entendimento relacional desses (SKEMP, 1976).

Dreyfus (1991), discutindo alguns tópicos de matemática com uma turma de excelentes alunos veteranos no ensino médio, chegou à conclusão de que, ao olhar o desempenho desses aparentemente bem sucedidos, eles mantêm grosseiros equívocos sobre alguns conceitos elementares de matemática. Segundo Davis (1998, p. 47), *a maioria das instruções matemáticas, desde a escola básica até os cursos universitários, ensina o que podemos chamar de rituais, ou seja, o passo a passo: faça isso, depois faça isso, depois faça isso*, ou seja, direcionando o aluno como se fosse para fazer uma receita de bolo, e alguns professores aceitam o ritual corretamente executado como um sucesso enorme de suas existências. Ou seja, os alunos aprendem simplesmente procedimentos e memorizam exemplos onde estes funcionam como já comentava Skemp (1976) demonstrando terem apenas um entendimento instrumental de conceitos matemáticos.

Parece que alguns pesquisadores ignoraram os argumentos de Skemp (1976) de que alunos precisam ter tanto entendimento instrumental (procedimental) como também entendimento relacional de conceitos matemáticos, sabendo como e por que usar determinados procedimentos ao invés de simplesmente usá-los. Como exemplo dessa concepção de que, induzindo o aluno a seguir todos os procedimentos passo a passo na resolução de um problema, trazemos as diretrizes para resolver problemas de taxas relacionadas apresentadas em Swokowski (1994, p. 197):

> i) ler o problema cuidadosamente várias vezes e analisar os dados e as quantidades que devem ser determinadas; ii) esboçar o gráfico do problema e rotulá-lo adequadamente, introduzindo variáveis para representar quantidades desconhecidas; iii) escrever todos os fatos conhecidos, expressando as taxas conhecidas e desconhecidas como derivadas das variáveis introduzidas em 2; iv) formular uma equação geral, relacionando as variáveis; v) diferenciar a equação obtida em 4 implicitamente em relação a t, obtendo uma relação geral entre as taxas; vi) fazer a substituição pelos valores e taxas conhecidos, obtendo a taxa de variação desejada.

O autor, ainda, aponta que um erro comum consiste em antecipar a introdução de valores numéricos específicos para as taxas e quantidades variáveis. É importante que se tenha em mente que se deve, primeiro, obter uma fórmula geral para problemas que relacionem as taxas de variação, em um instante arbitrário t, e que os valores numéricos só devem ser introduzidos na etapa final do processo de resolução. Devemos lembrar que essas diretrizes podem, sim, ajudar os alunos em algum momento. Entretanto, o objetivo de trazermos esse fato é que alguns professores universitários continuam enfatizando o pensamento pedagógico instrucional do ensino básico, que favorece mais entendimento instrumental e esquecem como já comentava Skemp (1976) que precisam ensinar também para que seus alunos obtenham um entendimento relacional de conceitos. Para Dreyfus (1991), os alunos de ensino médio acabam com um montante considerável de conhecimento matemático, mas, sem a metodologia de trabalho de um matemático, isto é, falta a eles o saber fazer que os possibilite usarem seus conhecimentos de forma flexível para resolver problemas desconhecidos por eles.

As pesquisas realizadas por Nasser, Sousa, Torraca, Assemany e Azevedo (2013) e professores colaboradores, no âmbito do Projeto Fundão, no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM/UFRJ), tiveram como objetivo investigar como se dá a transição do ensino médio para o superior. Esses autores empreenderam diversas ações para diminuir os índices de evasão na disciplina de Cálculo. Segundo esses pesquisadores, há relatos de que alunos não sabem calcular o valor de uma função num dado ponto e não têm ideia de como traçar gráficos de funções simples, nem mesmo completar o quadrado de uma expressão algébrica. Dentro desse contexto, o grupo decidiu investigar se as dificuldades na transição para o ensino superior, especificamente na disciplina de Cálculo, poderiam ser amenizadas por uma abordagem adequada de tópicos do ensino médio, como funções e geometria. Dessa forma, estar preparado ou exibir prontidão para a aprendizagem de Cálculo dependeria de vários conteúdos trabalhados na escola básica de forma adequada (NASSER; SOUSA; TORRACA, 2012). Esses autores acreditam que algumas dificuldades podem ser amenizadas, quando já foram trabalhadas no ensino médio. Além disso, eles citam, como exemplo, a construção do gráfico de funções definidas por mais de uma sentença e a análise de gráficos de funções por meio de translações de gráficos.

Quando o professor de Cálculo tem a oportunidade de, também, atuar como professor de matemática na escola básica, como acontece em muitos casos nos

IFES, ele tem uma oportunidade ímpar de trabalhar diversos exemplos de problemas da matemática básica que poderiam facilitar o desenvolvimento da prontidão para o Cálculo. Os exemplos de problemas de geometria trazidos por Nasser, Sousa e Torraca (2012) nos fazem acreditar que uma mudança na postura do professor pode ser um dos caminhos para diminuir as lacunas nessa transição do ensino básico para o superior. Por exemplo, para resolver o problema de Cálculo: *Uma esfera de raio 4 é inscrita num cone circular reto. Determinar as dimensões do cone de volume mínimo* (NASSER; SOUSA; TORRACA, 2012, p. 11).

Para a resolução desse problema, o estudante precisa exprimir o volume do cone como uma função de uma variável para, depois, aplicar a derivada. Esse mesmo padrão pode ser explorado quando explicamos o conteúdo de geometria espacial, inscrição de sólidos geométricos. Nesse caso, a questão poderia ser abordada da seguinte forma: *Uma esfera de raio 4 está inscrita num cone circular reto. Expressar o volume do cone como função de sua altura* (NASSER; SOUSA; TORRACA, 2012, p. 11). Dessa forma, possibilitaríamos aos alunos do ensino médio discutir problemas que, futuramente, eles poderiam encontrar na disciplina de Cálculo. Podemos perceber a partir dos exemplos anteriores, que não precisamos mudar o currículo do ensino médio, antecipando alguns conceitos de Cálculo. O que nós, professores do ensino médio, necessitamos é desenvolver situações problemas típicas do ensino médio que possam ajudar os estudantes a conseguir as bases fundamentais para o ensino de Cálculo (REZENDE, 2003).

Acreditamos que há uma necessidade de repensar o processo de ensino-aprendizagem no ensino médio e no ensino superior porque o professor precisa saber adaptar seu programa e mudar algumas condutas pedagógicas. Para Cury e Oliveira (2004, p. 38),

> os professores são os únicos “recursos” do processo de ensino que têm a capacidade de compreender as necessidades do aluno, saber o momento certo de introduzir um determinado conceito, retomar uma explicação, desafiar o aluno com a pergunta certa.

Confiamos que, além dessa nova postura vinda do professor, é também fundamental uma nova postura do aluno, não agindo em aulas apenas como um ser passivo, esperando que o professor faça milagres, mas, também, agindo para aprender a estudar e querendo se empenhar em seus estudos. Santos (1997) comenta que mudanças nos processos de ensino implicam necessariamente em mudanças nos processos de aprendizagem e nos processos de avaliar se ocorreu ensino e aprendizagem. Ademais, essa autora argumenta que os papéis de professor e alunos precisam e devem mudar quando se pensa em alterar simultaneamente os processos de ensino, aprendizagem e avaliação.

3.4.2 Pensamento Matemático Avançado

Na construção do conhecimento matemático, em qualquer etapa da vida escolar de qualquer aluno, seja na sua formação mais elementar até o nível elevado no ensino superior, temos as definições matemáticas com seus axiomas, teoremas e deduções lógicas sempre presentes. No nível superior de estudos de matemática, espera-se que o aluno esteja com um pensamento matemático avançado. Segundo Tall (1991), o aluno entra, no mundo completo do matemático profissional, não só em termos de rigor, e por isso, deverá compreender como os conceitos são fundamentados. Nessa fase, segundo Domingos (2003), os alunos têm contato com situações em que são exigidas abstrações de definições e deduções, baseadas em processos de representações e abstrações que apresentam um nível elevado de complexidade. Essa mudança do pensamento matemático elementar, para um pensamento matemático avançado, envolve uma transição difícil para Tall (1991), porque eles têm que mudar a forma de pensar.

David Tall diz que isso ocorre a partir da ideia de que conceitos matemáticos têm uma base intuitiva fundamentada na experiência, mas os alunos, na universidade, têm que compreender e construir conceitos matemáticos especificados por deduções formais e suas propriedades reconstruídas através de deduções lógicas. De acordo com Tall (1991), muitos dos processos do pensamento matemático avançado já são encontrados em um nível mais elementar, entretanto com algumas diferenças em nível de abstração formal.

> A mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: de *descrever* para *definir*, de *convencer* para *provar* em uma forma lógica baseada nessas definições. Essa transição requer uma reconstrução cognitiva que é vista, durante os esforços iniciais dos estudantes universitários com abstrações formais, na medida em que eles enfrentam o primeiro ano da universidade. É a transição de *coerência*

> da matemática elementar para a *consequência* da matemática avançada, baseada em entidades abstratas que o indivíduo deve construir através de deduções, a partir de definições formais (TALL, 1991, p. 20)[23] (Tradução nossa).

Diante disso, devemos considerar que, durante o processo de ensino-aprendizagem de matemática no nível superior, os alunos precisam passar por situações em que eles possam construir conceitos por meio de deduções e se envolver em atividades que possam favorecer a abstração e a generalização. Dreyfus (1991) afirma que o pensamento matemático avançado pode ser definido e compreendido por uma série de processos que se relacionam e que envolvem a representação, abstração, visualização, generalização, modelagem e sintetização. Esse autor também afirma que não há diferença entre muitos processos do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado, ainda que a matemática avançada seja mais focada na abstração da definição e dedução. Dreyfus (1991) traz esse argumento porque muitos deles já estão presentes no pensamento infantil sobre alguns conceitos matemáticos elementares, como número e valor relativo.

Ademais, Dreyfus (1991) ressalta que: *É possível pensar sobre tópicos de matemática avançada de uma forma elementar, e podem ter-se pensamentos avançados sobre tópicos elementares* (p. 26). Por exemplo, é muito comum estudantes universitários errarem "regras" de sinais em operações com números inteiros, do tipo (-1).(-1)=+1. Veja-se como um exemplo tão simples está carregado de significados matemáticos. Provavelmente esse estudante "decorou/memorizou" as regras de sinais, sem nenhum tipo de compreensão, e, por algum motivo, ele não consegue lembrar a regra. Aqui temos certamente mais um exemplo como comentava Skemp (1976) de que estudantes adquiriram apenas entendimento instrumental a respeito de como multiplicar inteiros sem terem entendido de forma relacional como e porque multiplicam números inteiros desta forma.

---

[23] The move from elementary to advanced mathematical thinking involves a significant transition: that from *describing* to *defining*, from *convincing* to *proving* in a logical manner based on those definitions. This transition requires a cognitive reconstruction which is seen during the university student's initial struggle with formal abstractions as they tackle the first year of university. It is the transition from the *coherence* of elementary mathematics to the *consequence* of advanced mathematics, based on abstract entities which the individual must construct through deductions from formal definitions.

Sabemos que a demonstração matemática dessa afirmação requer o domínio de uma série de propriedades dos números reais, que, geralmente, não é trabalhada de maneira formal no ensino básico. Nosso objetivo, com esse exemplo, é mostrar que essa mudança, que é apontada por Tall (1991), entre convencer e provar algumas afirmações com proposições e definições formais, é umas das diferenças entre pensamento elementar e avançado da matemática. Para Dreyfus (1991), uma distinção entre o pensamento matemático avançado e o elementar é a complexidade de como lidar com ela, pois, em termos de abstração e representação, alguém pode variar de um nível para outro. Portanto, a distinção está em como a complexidade é gerida.

3.4.2.1 IMAGEM DO CONCEITO E A DEFINIÇÃO DO CONCEITO

A palavra conceito é proveniente do latim: “conceptu”. Dentre os diversos significados dessa palavra, iremos considerar os seguintes: i) expressão sintética; ii) opinião; iii) conteúdo de uma proposição; iv) ideia, enquanto abstrata e geral. Quando pensamos nela, dentro do campo da matemática e da comunidade acadêmica, devemos entender que seu significado difere de certa forma do senso comum. Por exemplo, quando um estudante afirma que compreendeu o conceito de limite, é necessário entender que não basta simplesmente ele ter uma ideia intuitiva ou ter decorado a sua definição formal. Por trás da compreensão, existe uma série de proposições, definições e argumentos lógicos que geram esse conceito.

No ensino de matemática, a preocupação principal deveria ser a construção de esquemas para seu entendimento. Aprender um conceito matemático envolve abstração reflexiva sobre os esquemas mentais já existentes, para que novos se construam e favoreçam a elaboração de novos conceitos. *Um esquema não se constrói quando há ausência de esquemas pré-existentes* (DUBINSKY, 1991, p. 231). De acordo com Tall e Vinner (1981), a matemática é normalmente considerada como um assunto de grande precisão, em que os conceitos que formam seu alicerce teórico precisam ser definidos a partir de uma base sólida. Muitos conceitos usados pelos estudantes em Cálculo não são formalmente definidos, e isso acontece, por exemplo, com o conceito de limite. O que acontece é que esses estudantes aprendem a reconhecê-lo pela experiência e passam a utilizá-lo de maneira conveniente (CORNU, 1991). Mais tarde, eles podem ser refinados no seu significado e interpretação, com o aumento da sutileza da sua definição formal e precisa (TALL, VINNER, 1981).

Durante os processos cognitivos iniciais na construção de um conceito, são atribuídos um nome, ou um símbolo, que permite que ele seja comunicado e que auxilie na sua manipulação mental (TALL, VINNER, 1981). Durante os processos mentais de recordar e manipular um conceito, muitos processos mentais são ativados consciente ou inconscientemente, e podem afetar o seu significado ou uso. Por exemplo, quando dizemos a palavra *limite*, para uma pessoa que não passou por nenhuma experiência matemática a respeito desse tema, essa palavra pode ter diferentes significados para diferentes pessoas e momentos. Para Cornu (1991), o mais frequente é considerar limite como algo intransponível, uma restrição, uma proibição, uma regra, ou ainda, o final. Para um futuro estudante universitário, esses significados com os quais ele está acostumado a lidar na vida diária a respeito de limite fazem parte de sua imagem do conceito. Portanto, são essas ideias e significados que estão em sua mente e que ele tem tido experiência e que formam sua imagem do conceito de limite. E é claro que essas imagens podem interferir e causar problemas mais tarde, quando a definição intuitiva e formal desse conceito matemático for apresentada e formalizada para o estudante na universidade.

Vinner (1991) chama a nossa atenção de como associamos em nossa mente imagens relacionadas com a visão e escuta, quando enxergamos um nome de um conceito ou escutamos um nome de um conceito que estamos aprendendo e construindo. Dessa forma vamos conceber que todos os atributos mentais associados com um conceito, sejam eles conscientes ou inconscientes, serão incluídos na imagem do conceito. Segundo Tall e Vinner (1981), os mais variados estímulos podem ativar diferentes partes da imagem do conceito em nossa mente, podendo se desenvolver de maneira diferenciada a qualquer momento. A definição do conceito é a explicação formalizada em palavras para definir um conceito que estamos nomeando e procurando aprender. Em alguns casos, uma definição do conceito pode ser uma reconstrução pessoal de uma definição formal e vai estar provavelmente incluindo as imagens do conceito que essa pessoa vem construindo e experimentando com esse conceito até esse momento.

Domingos (2003) traz em seu estudo detalhes da pesquisa realizada por Tall e Vinner (1981)[24] com estudantes universitários.

> Com o objetivo de caracterizar o conceito imagem, sobre continuidade, dos alunos das escolas inglesas que entram na universidade Tall e Vinner (1981) recorreram a um questionário que aplicaram a 41 alunos. Pedia-se para indicarem quais das funções apresentadas no quadro 3.1 eram contínuas e para darem uma justificação para a sua resposta. Todos os alunos consideraram que a primeira função era contínua embora muitas das explicações dadas fossem erradas do ponto de vista matemático. Eles justificaram a continuidade, por exemplo, dizendo que a função era dada por uma única fórmula. Na segunda função apenas 6 alunos consideraram que se tratava de uma função contínua. Isto mostra que o conceito imagem que a maioria dos alunos invoca não permite falhas no gráfico (DOMINGOS, 2003, p. 92)

Observamos que estudantes universitários quando estão finalizando um curso de graduação em matemática já possuem uma ou mais imagens desse conceito, como sendo uma função que não possui nenhum tipo de interrupção ou mesmo que seria uma função que está definida para todo $x \in R$. Talvez alunos universitários estudando no primeiro semestre depois de serem expostos aos conceitos de continuidade e função contínua tivessem imagens conceituais semelhantes àquelas dos estudantes concluindo o curso de graduação e isso deveria ser investigado.

3.4.3 Entendimento instrumental e entendimento relacional

Pesquisadores em educação matemática utilizam o termo compreensão ou entendimento com o intuito de justificar que ocorreu uma construção do conhecimento matemático. Para Skemp (1976), podemos categorizar a aprendizagem dos conceitos matemáticos em dois níveis: nível de entendimento ou compreensão instrumental e nível de entendimento ou compreensão relacional.

A compreensão instrumental focaliza a obtenção de regras e procedimentos mecânicos de cálculo e a capacidade que o indivíduo tem para utilizar algum tipo de regra para obter a solução de determinado problema, e não se evidencia o processo de justificação dos fatos. A compreensão instrumental é realmente útil quando você tem que saber como fazer uma tarefa específica rapidamente, e não está muito preocupado sobre como ela se encaixa em outras semelhantes.

---

[24] Tall, D. e Vinner, S.. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, (1981), p. 151-169.

A compreensão relacional fundamenta-se em princípios que vão além de saber usar regras e fórmulas na resolução de problemas, é preciso entender como e por que certas regras foram utilizadas e como poderíamos utilizá-las em outras situações. O entendimento relacional é útil quando se quer explorar ideias, não se preocupando com o seu desenvolvimento e, sim, o processo. Silva (2013) interpreta as categorias de compreensão dos conceitos matemáticos de Skemp (1976) como:

> [...] na compreensão instrumental, o aluno domina uma coleção isolada de regras e algoritmos aprendidos por meio da repetição, sem estabelecer relações entre conceitos. Já na compreensão relacional, o aluno é capaz de realizar uma grande variedade de atividades com criatividade e inteligência, permitindo relacionar diferentes conceitos em um só esquema (SILVA, 2013, p. 15).

Acreditamos que, durante o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de matemática, especificamente dos conteúdos de Cálculo, quando o professor adota e acredita em uma postura de passar listas intermináveis de exercícios repetidos em que o aluno necessita utilizar mecanicamente diversas regras algébricas e aritméticas para a resolução desses exercícios. Esse professor adota uma postura de ensino que prioriza uma compreensão instrumental (SKEMP, 1976) do assunto.

Para Skemp (1976), existe ainda outro problema quando o professor adota um procedimento de ensino instrumental e quer cobrar do estudante em provas e testes uma compreensão relacional de conceitos. Esse comportamento do professor ocorre talvez por ele acreditar que cabe ao aluno fazer essa transposição de uma compreensão instrumental para uma compreensão relacional na resolução dos problemas matemáticos. Acreditamos que aqui ocorre um equívoco do professor, pois cabe a ele tanto mostrar procedimentos de cálculo como também explicar para seus alunos como e por que usar determinados procedimentos. Supor que alunos possam construir um entendimento ou compreensão relacional de conceitos matemáticos sozinhos evidencia um equívoco pedagógico.

Entendemos que, na maior parte do processo de ensino-aprendizagem de matemática, os alunos nem sempre vão querer saber todas as explicações e justificativas que certos conteúdos exigem. Tudo que eles querem é algum tipo de regra para obter a resposta correta e imediata. Se, dessa forma, conseguirem atingir seu objetivo e acertarem questões de aulas e provas, parece que eles se dão por satisfeitos e ignoram ou acham desnecessárias as outras etapas do processo de construção do conhecimento. Podemos ter essa forma de explicar o comportamento dos alunos, mas também podemos problematizar e questionar essa situação descrita. Será que este comportamento dos alunos aconteceu assim desde os anos iniciais de estudo de matemática ou eles foram influenciados por professores que ensinaram de forma instrumental e cobraram em exercícios de aulas e provas de forma instrumental?

Portanto, será preciso mais do que mudar o estilo de aprendizagem do aluno. Faz-se necessário procurar um equilíbrio entre aprendizagem com compreensão relacional e aprendizagem com compreensão instrumental, assim como se faz necessário um equilíbrio entre ensino que propicie compreensão instrumental e também compreensão relacional. Ademais, será necessário pensar também em equilíbrio entre tarefas avaliativas que cobrem os dois tipos de compreensão, porque os dois são importantes e necessários como afirma Skemp (1976). Porque segundo esse autor, e concordamos com ele, apenas quem possui os dois entendimentos de um conceito, poderá de fato evidenciar que aprendeu e sabe usar este conceito e relacionar com outros. Também se faz necessário que professores reconheçam que deve haver equilíbrio, coerência e inter-relação constante entre os processos de ensinar, aprender e avaliar (SANTOS, 1997).

Silva (2013) assinala que é importante pensar que esses níveis de compreensão não correspondem a dois tipos disjuntos. Os argumentos de Fossa (2008) sobre a relação entre eles nos fazem refletir: por que não acreditar que são dois estágios de um mesmo processo de compreensão? Ou seja, em um momento inicial da aprendizagem, o estudante estaria, em princípio, em um nível de compreensão instrumental e que, gradativamente, poderia ter a oportunidade de ir construindo uma compreensão relacional. Por outro lado, vale argumentar que o papel do professor é e deve ser fundamental para que isso ocorra dentro do processo de aprendizagem de matemática, pois sabemos que nossos alunos não irão adquirir nem construir sozinhos tais estágios ou níveis de compreensão. E se professores trabalharem em aulas de matemática apenas privilegiando um tipo de compreensão nada pode garantir que os alunos adquiram o outro tipo de compreensão.

Segundo Silva (2013), o professor que pretende priorizar um ensino que promova uma multiplicidade de regras, baseadas em memorizações, em detrimento do entendimento do que está sendo feito, estará promovendo um ensino com características instrumentais. *Esse tipo de comportamento pretende obter a resposta, de certa forma, mais rápida e confiável, fazendo com que as recompensas sejam mais imediatas e aparentes* (SILVA, 2013, p. 25). Podemos citar como exemplo, quando de maneira equivocada, dizemos aos alunos que, no cálculo de limites de funções polinomiais, basta substituir os valores numéricos de x na função, para obter o valor do limite, sem fazermos nenhum tipo de reflexão sobre o comportamento dessa função. No entanto, quando mudamos nosso foco para um ensino relacional, devemos ter consciência de que é um tipo de ensino que demanda mais tempo. Porém, *uma vez aprendido, é mais fácil de lembrar* (SILVA, 2013, p. 25). Dessa forma, Silva (2013) nos alerta que Skemp (1980)[25] já destacava quatro fatores que ocorrem no processo de ensino que contribuem para a dificuldade dos professores em priorizar a compreensão relacional ao ensinar matemática que são:

> 1) O efeito retroativo dos exames; 2) Currículos sobrecarregados; 3) Dificuldade de avaliar se o sujeito compreende relacionalmente ou instrumentalmente; 4) A grande dificuldade psicológica para os professores de acomodação (reestruturação) dos seus esquemas existentes e de longa data, mesmo para a minoria que conhece a necessidade de querer fazê-lo e ter tempo para estudar (SKEMP, 1980, apud SILVA, 2013, p. 26).

Em nossa investigação com estudantes repetentes da disciplina de Cálculo I, direcionamos nossos olhares para o terceiro item dos fatores acima. Nosso objetivo foi investigar e compreender qual o nível de compreensão desses alunos em relação ao conteúdo de limites de funções. Além disso, tivemos a oportunidade de refletir sobre nossa postura enquanto professor na tentativa de definir qual o tipo de ensino que pretendíamos e que conseguimos realizar. Nossa aposta foi de acreditar que o ensino de matemática com significado teria mais chances de oferecer aos nossos alunos uma compreensão relacional dos conteúdos matemáticos abordados.

---

[25] SKEMP, R. **Psicologia del aprendizaje de las matemáticas**. Tradução Gonzalo Gonzalvo Mainar. Madrid: Ed. Morata, S. A.,1980.

3.4.4 Afetividade e matemática

A matemática tem sido vista cada vez menos como um sistema estático, pronto e acabado (ERNEST, 1989; THOMPSON, 1984). Pois tanto a matemática como seu ensino vem sofrendo alterações ao longo dos tempos e sendo interpretados e medidos por diversos fatores. Por exemplo, fatores históricos, sociais, culturais, étnicos e outros são levados em conta quando pensamos em matemática e seu ensino.

Atualmente, muitos argumentam que a matemática é uma construção humana e que é compreendido como um sistema dinâmico de conhecimentos, que pode e deve ser revisitado e reinterpretado se tivermos questionamentos acerca de conceitos matemáticos já estruturados (ERNEST, 1989; GROUWS, 1992; von GLASERSFELD, 1991). Essas mudanças de olhares, concepções e reflexões acerca de matemática, seu ensino e aprendizagem têm sido molas propulsoras de pesquisas em educação matemática nas últimas quatro décadas. Além disso, pensar sobre a influência do que se pensa e se sente quando alguém aprende, tem sucesso e/ou tem fracasso a partir do que se experimenta e vivencia na escola com a matemática desde os primeiros anos escolares, tem despertado o desejo para investigar as relações entre afetividade e cognição em matemática (GOMEZ CHACÓN, 2003; MCLEOD, 1990; MENDUNI 2003; ROCHA, 2009; SANTOS, 1993; SILVA, 2009).

Entretanto, quando consideramos os exames e resultados acadêmicos de alunos em testes de larga escala, como as provas do Sistema de Avaliação da Educação Básica [SAEB] e Exame Nacional de Ensino Médio [ENEM], concursos para professores, nós verificamos que ainda seguem medindo e valorizando aspectos cognitivos. Alguns educadores e pesquisadores já percebem e concebem a matemática, os processos de ensino, aprendizagem e avaliação como sendo sistemas dinâmicos em que fatores cognitivos, sociais, culturais, históricos e emocionais interferem o tempo todo (ERNEST, 1989; GÓMEZ CHACÓN, 2003; ROCHA, 2009; SANTOS, 1993, 1994, 1995, 1997; SILVA, 2007; SILVA, 2009).

Paul Ernest (1988), em seu artigo intitulado *The impact of beliefs on the teaching of mathematics (O impacto das crenças e concepções no ensino de matemática),* enfatiza que crenças e concepções são fatores determinantes da prática do professor. Essa prática é influenciada pelos conteúdos e/ou esquemas mentais do professor, principalmente o sistema de crenças e concepções referentes à matemática, seu ensino e aprendizagem. Devemos ainda considerar o contexto social de ensino e o nível de processos de pensamento e reflexões do professor. Quando o professor passar a considerar essas variáveis, ele poderá desenvolver conhecimentos e atitudes metacognitivas (SANTOS, 1993) importantes para inovações de ensino, como, por exemplo, análise de erros.

Segundo Santos (1994) podemos definir metacognição como sendo pensar sobre, gerenciar e controlar seus pensamentos, identificando tanto o que se sabe como o que não se sabe. Um professor está procurando desenvolvê-la quando procura pensar e refletir em nível consciente sobre como ele aprendeu matemática, os conceitos matemáticos que domina e aqueles em que ele tem dificuldade, assim como se recordar de conteúdos em que sentiu dificuldades de aprendizagem (SANTOS, 1997). Isso também envolve procurar pensar em como seus alunos aprendem, em como ele compartilha os conhecimentos matemáticos com seus alunos e em pensar e refletir acerca de como eles podem ultrapassar dificuldades de aprendizagem que surjam em aulas de matemática.

Além disso, Gómez Chacón (2003) enfatiza que os resultados afetivos, procedentes da metacognição e da dimensão afetiva do indivíduo, são fatores que determinam a qualidade de ensino e de aprendizagem. Ela ressalta que, em certos momentos, esses fatores são desconsiderados, assim professor e alunos perdem a oportunidade de que conhecimentos matemáticos sejam compartilhados de modo significativo. Esse novo olhar de alguns autores sobre os aspectos afetivos, cognitivos e outros começou a ter destaque por causa da relevância dos mesmos e de sua influência nos sujeitos (professor/aluno) diretamente envolvidos no processo de ensino e aprendizagem (GROUWS, 1992).

A partir de alguns estudos desenvolvidos por pesquisadores como Ernest (1989), Santos (1993, 1994, 1995, 1997), Ponte (1999), Gómez Chacón (2003), Rocha

(2009), Silva (2009) e outros que consideram os fatores emocionais no ensino e na aprendizagem, percebe-se que, na escola, pouca importância ainda é dada aos aspectos afetivos. O que temos vivenciado durante nossa prática de sala de aula é que as emoções, atitudes, crenças e concepções que alunos e professores trazem a respeito de matemática, experiências de ensino, aprendizagem e avaliação de matemática, estão enraizadas nesses sujeitos. Além disso, todos esses fatores podem influenciar nos processos de ensino, aprendizagem e avaliação que deveriam ser pensados como inter-relacionados e todos sofrendo influências entre si, pois cada processo influencia os demais e é influenciado pelos outros.

Portanto, não é possível deixar questões referentes ao emocional fora de nossas aulas e reflexões. Tais aspectos não poderão facilmente ser modificados apenas pela imposição de um conteúdo ou disciplina. Então, quando pensamos nessas relações, devemos nos perguntar se seria possível relacionar e aprender com essa questão afetiva em nossas práticas em sala de aula. E, se conseguiremos estabelecer significados para esses afetos nas atividades matemáticas.

Estamos concebendo como fatores afetivos e emocionais na aprendizagem, e de maneira especial na aprendizagem matemática, todos aqueles que, interligados, podem estruturar ou causar desequilíbrio na aprendizagem, pois não são estáticos e os resultados tendem a ser compreendidos sob uma nova perspectiva do fazer matemático. Menduni (2003, p. 60), em seu trabalho sobre emoções que emergem da prática avaliativa em matemática, afirmou que *os componentes do domínio afetivo não se desenvolvem de maneira isolada e, sim, apresentando uma interseção entre eles*. Estaremos considerando, como domínio afetivo em nosso estudo, conjunto de fenômenos que se traduzem nas relações entre professores/alunos e a disciplina de matemática, e que se manifestam em forma de sentimentos, de satisfação ou insatisfação, de alegria ou tristeza, de afeição ou não acerca de tarefas e de tópicos de matemática.

Procurando compreender o que seriam atitudes em relação à matemática, devemos inicialmente entender o que é atitude. Segundo Gómez Chacón (2003), seria:

> [...] *uma predisposição avaliativa (isto é, positiva ou negativa) que determina as intenções pessoais e influi no comportamento*. Consta, portanto, de três

> componentes: um cognitivo, que se manifesta nas crenças implícitas em tal atitude; um componente afetivo, que se manifesta nos sentimentos de aceitação ou de repúdio da tarefa ou da matéria; e um componente intencional ou de tendência a certo tipo de comportamento (GÓMEZ CHACÓN, 2003, p. 21).

Essa definição é do tipo geral e serve para qualquer atividade a que nosso aluno possa se submeter, independentemente de qual seja seu objeto ou tarefa. Se estivermos considerando como objeto a matemática e seu ensino, duas categorias devem ser diferenciadas: suas atitudes em relação à matemática e suas atitudes matemáticas. Considerando essas duas possibilidades, Gómez Chacón (2003) esclarece que:

> As atitudes em relação à matemática referem-se à valorização e ao apreço dessa disciplina, bem como ao interesse por essa matéria e por sua aprendizagem, sobressaindo mais o componente afetivo do que o cognitivo; o componente afetivo manifesta-se em termos de interesse, satisfação, curiosidade, valorização, etc. (p. 21).

Para Silva (2007, p. 29), *o conceito de atitudes ficará sempre ligado a uma emoção moderada que permite o surgimento de opiniões favoráveis ou desfavoráveis sobre determinado objeto de estudo em sala de aula*. De acordo com Brito (1998, p. 112), atitude é *uma disposição pessoal, idiossincrática, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas que assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do indivíduo*. Ela julga que os principais atributos de uma atitude em relação à matemática são a sua direção, podendo ser positiva ou negativa, e sua intensidade de gostar ou não dessa disciplina.

Acreditamos que uma atitude negativa poderá ser demonstrada por um aluno com uma apatia para aprendê-la, a partir do momento em que ele não compreende como aplicá-la e não percebe os benefícios que essa disciplina pode trazer para seu cotidiano. No entanto, cabe ao professor oferecer condições de diálogo e reflexão para que o aluno tenha chance de evidenciar novas experiências e evitar a concretização desse tipo de atitude. É importante compreender que nossas atitudes, enquanto educadores, e a maneira como direcionamos as aulas proporcionarão aos alunos uma pré-avaliação em relação a estarmos preparados emocionalmente para o que nos propomos a fazer. Assim posto, também precisamos compreender que nossas atitudes podem influenciar nos processos de ensino, de aprendizagem, de avaliação e na própria atitude desses alunos frente à matemática.

4 METODOLOGIA

Este capítulo tem por objetivo descrever o tipo de investigação realizada e os motivos dessa escolha. Também relata as fases da pesquisa de campo, os sujeitos participantes do estudo, as atividades e instrumentos utilizados na coleta de dados. Conclui com os procedimentos utilizados para análise e interpretação dos dados.

Adotamos um processo de coleta de dados e informações pautados numa concepção de pesquisa qualitativa, visto que a subjetividade do pesquisador e daqueles que estão sendo estudados fazem parte do processo de pesquisa (FLICK, 2004). Os fatores que justificam nossa escolha pela pesquisa de natureza qualitativa são os pontos de vista subjetivos presentes nas informações que foram descritas e analisadas. Como, por exemplo, destacamos: i) as nossas reflexões sobre nosso papel de professor e professor-pesquisador; ii) as observações, e reflexões dos professores (professor regente e professor-pesquisador) e alunos sobre o desempenho de ambos no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo; iii) o enfoque indutivo utilizado nas análise dos dados e iv) o processo descritivo e interpretativo utilizado para apresentação e análise dos dados.

Estávamos focados em investigar e compreender as causas e motivos do insucesso de estudantes repetentes em Cálculo I e as dificuldades deles em resolver tarefas ligadas à ideia de limite de funções reais. Observamos e analisamos também os vários obstáculos que estudantes repetentes da disciplina de Cálculo I encontram para conseguirem uma possível compreensão do conceito de limite de funções reais. Criamos situações em aula, como conversas informais durante o reforço extraclasse, que denominamos Projeto Cálculo (Ver Apêndice I) e instrumentos de coleta de dados, que nos ajudaram a conhecê-los melhor. Podemos dizer que levamos em conta a pluralidade de vida desses estudantes e suas expectativas de aprendizagem em relação à disciplina de Cálculo I.

Tínhamos consciência de que não era possível quantificar dificuldades dos estudantes, motivação e expectativas deles para cursarem a disciplina de Cálculo I novamente. Sabíamos que, se tentássemos quantificar acertos e erros nas questões propostas, isto não nos explicaria as dificuldades deles e apenas daria alguns indícios. Portanto, estávamos conscientes de que esse tipo de comportamento não nos ajudaria a compreender, na essência, o que eles estavam aprendendo ou não de determinado conteúdo. Assim, foi preciso procurar olhar por trás das respostas dos alunos, ou seja, foi necessário procurar compreender, dialogar e levantar questionamentos a partir das respostas dos estudantes.

Para Cury (2008, p. 63), *na análise das respostas dos alunos, ao considerar apenas a classificação e a contagem do número de respostas de cada tipo, a investigação fica muito pobre, não trazendo benefícios a alunos e professores*. Sentíamos que a nossa preocupação não era somente verificar se uma resposta estava certa ou errada. Precisávamos compreender o que poderíamos aprender com os acertos e erros desses estudantes repetentes da disciplina de Cálculo I. Para compreender os aspectos essenciais da pesquisa qualitativa que diferem dos métodos utilizados na pesquisa quantitativa, pode-se citar o que diz Uwe Flick (2004) sobre o tema:

> Os aspectos essenciais da pesquisa qualitativa consistem na escolha correta de métodos e teorias oportunos, no reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas, nas reflexões dos pesquisadores a respeito de sua pesquisa como parte do processo de produção do conhecimento, e na variedade de abordagens e métodos (p. 20).

Os dados e informações provenientes dos instrumentos que utilizamos para coletar e analisar, tais como, questionários para conhecer a turma, atividades de reforço e aprofundamento sobre limite, análise de erros com a turma, foram variados. Esses foram obtidos e construídos a partir de (a) observações e registros de aulas, (b) diálogos e registros constantes com a orientadora de doutorado, (c) aplicação de questionários para os estudantes, (d) atividades de apoio, com a participação do professor-pesquisador, realizadas em horário contraturno, (e) provas e testes sobre limite de funções, e (f) reflexões individuais e em conjunto com a orientadora e colegas de doutorado. Como já mencionamos, nosso objetivo era compreender melhor os acertos e erros que eram efetivamente de conteúdos da matemática básica ou erros específicos do Cálculo.

Optou-se por esses instrumentos após reler, rever e refletir acerca das etapas de observação, registro e análise dos dados relativos ao estudo exploratório. Também influenciou a leitura das informações coletadas junto ao registro acadêmico sobre o desempenho dos estudantes na disciplina de Cálculo I. Decidimos apostar em que, a partir da análise de erros (BORASI, 1985, 1986b, 1989a, 1989b; CURY, 1989, 1994, 2003, 2004, 2008; CAVASOTTO, 2010; ESTEBAN, 2013; PINTO, 1998), poderíamos construir um caminho para entender o desempenho dos estudantes e, neste, tentar interferir. Acreditávamos e acreditamos que, na tentativa de compreender os erros cometidos pelos estudantes, fossem de conteúdos da matemática básica ou erros específicos de Cálculo, alguns caminhos poderiam surgir. Assim conseguiríamos perceber algumas limitações com esses conteúdos matemáticos e, consequentemente, poderíamos tentar ajudá-los a superá-las. Além disso, foi possível refletir sobre nosso papel enquanto professor universitário na aprendizagem de Cálculo desses estudantes.

Com olhar diferenciado para a nossa prática, concordamos com os argumentos de Silva e Santos-Wagner (1999), ao afirmarem *que o objetivo último da pesquisa em educação matemática é a melhoria da aprendizagem de Matemática, mesmo sabendo que não haja consenso entre alguns pesquisadores sobre essa questão* (SIERPINSKA & KILPATRICK, 1998[26]; *apud* SILVA & SANTOS-WAGNER, 1999, p. 13). Acreditamos que um passo importante a ser dado por qualquer pesquisador é ele acreditar que é possível aproximar os dois mundos tão distantes, que são teoria e prática. Segundo Silva e Santos-Wagner (1999), vale a pena destacar que:

> Discute-se muito sobre as dificuldades do ensino e sobre as necessidades de sua melhoria. As revistas divulgam artigos cada vez mais especializados, com termos desconhecidos para a maioria dos professores, e comentam resultados interessantes que parece que dão certo. Porém, esses estudos ficam cada vez mais distantes da prática de sala de aula e não oferecem ao professor ideias concretas. Esse professor também aspira a um ensino mais eficaz e atraente, mas sente-se muitas vezes impotente por não compreender nem perceber a relação dessas pesquisas com sua prática docente (p. 11)

Com esse olhar sobre a prática, realizamos uma pesquisa qualitativa do tipo pesquisa-ação. Os pesquisadores Fiorentini e Lorenzato (2006) argumentam que esse é um tipo especial de investigação, pois:

---

[26] SIERPINSKA, A., KILPATRICK, J. (Eds.) **Mathematics education as a research domain**: a search for identity. Dordrecht, Boston e London: Kluwer Academic Publishers, 1998.

> O pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas, sobretudo, para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes. Ou seja, é uma modalidade de atuação e observação centrada na reflexão (p. 112).

Acreditamos que, neste estudo, procuramos compreender nossas ações na tentativa de modificar a situação que estava posta, ou seja, tínhamos uma turma de estudantes repetentes que não acreditavam em suas potencialidades de aprendizagem e com pouca autoestima. Estávamos cientes dos desafios e cuidados que precisávamos ter com essa turma, por isso, procuramos envolver, em uma ação conjunta, todos os participantes da pesquisa, nós (professores) e principalmente nossos alunos.

Conseguimos nos envolver de maneira intensa e direta com esses estudantes, porque, em alguns momentos da pesquisa, por motivo de saúde, o professor regente precisou se ausentar por três semanas, e o professor-pesquisador assumiu a disciplina. Nesse momento, passamos a *pesquisar sobre a própria prática* (NASSER, SOUSA, TORRACA, 2012, p. 10), uma vez que passamos a assumir o papel de docente da turma. Alguns autores comentam sobre as dificuldades que um professor-investigador[27] de sua própria prática enfrenta e as limitações e incoerências que podem ocorrer nos momentos de coleta e análise de dados (FIORENTINI; LORENZATO, 2006). Segundo Ponte (2002), os problemas que professores enfrentam, que surgem na condução do processo de ensino-aprendizagem são:

> [...] de um modo geral, enfrentados com boa vontade e bom senso, tendo por base a sua experiência profissional, mas, frequentemente, isso não conduz a soluções satisfatórias. Daí, a necessidade de o professor se envolver em investigação que o ajude a lidar com os problemas da sua prática (p. 5).

Tentamos manter um olhar curioso e estávamos convictos das nossas indagações. O planejamento e a avaliação contínua sobre o nosso trabalho em conjunto com a orientadora, ao longo do processo de pesquisa, ajudaram-nos a compreender as

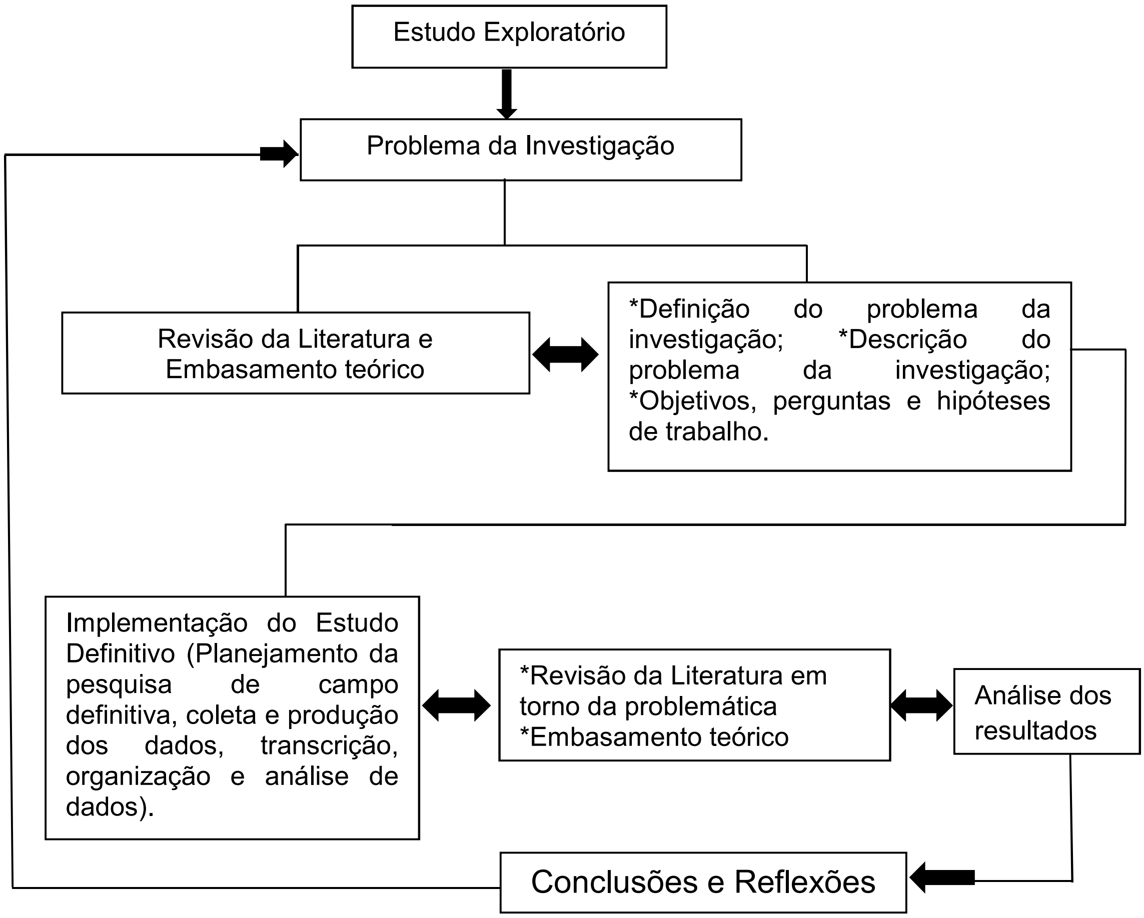
---

[27] Um professor-investigador é um professor que realiza investigação, normalmente sobre a sua prática, mas, também, por vezes, sobre outros assuntos (PONTE, 2002, p. 9)

potencialidades bem como as limitações de ser professor e pesquisador ao mesmo tempo. Para Ponte (2002), torna-se necessária a exploração constante da prática e a sua permanente avaliação e reformulação de ações que deram certo, ou das ações que não deram certo. Portanto, é preciso experimentar, analisar, refletir e investigar a respeito de diversos tipos de procedimentos de ensino e diferentes maneiras de abordar os conteúdos matemáticos. Isso pode e deve ser feito tanto com o intuito de levar os estudantes a aprenderem quanto o professor pesquisador aprender a investigar a sua prática. Para isso, é fundamental compreender bem os modos de pensar e as dificuldades próprias dos alunos.

Para Ponte (2002, p.16), toda investigação envolve quatro momentos fundamentais: *a) a formulação do problema ou das questões de investigação; b) a coleta dos elementos que permitam responder esse problema; c) a intepretação da informação recolhida com vista a tirar conclusões, e d) a divulgação dos resultados e conclusões obtidas*. De certo modo seguimos essas etapas citadas pelo autor em nosso estudo. Por outro lado, ao fazermos uma releitura de todo o percurso da pesquisa de campo realizada e das análises dos dados constatamos que seguimos um modelo estrutural semelhante ao de Hitt e Lara (1999), e usado por Murillo (2004). Podemos resumir os vários momentos da nossa investigação a partir da Figura 7.

Figura 7 – Estruturação da pesquisa



Fonte: Elaborado pelo pesquisador ao adaptar de MURILLO (2004).

4.1 ESTUDO EXPLORATÓRIO

Tomamos como ponto de partida a nossa experiência como professor de Cálculo I dos cursos de Agronomia e Licenciatura em Ciências Agrárias, desde 2010, no IFES-Campus Itapina. Consideramos, também, que investigar em matemática consiste em: criar, inventar, analisar, comparar, estruturar, construir, aplicar conhecimentos e descobrir (FONSECA, 2002). A partir disso, realizamos, no primeiro semestre de 2013, uma experiência de ensino e aprendizagem com uma turma de estudantes repetentes de Cálculo I, no IFES-Campus Itapina. Acreditamos que só é possível "aprender a investigar investigando".

Trazemos, inicialmente, a descrição da turma do estudo exploratório e algumas informações que nos ajudaram a conhecer melhor quem eram esses estudantes repetentes. Apresentamos, no final desta seção, nossas aprendizagens, algumas conclusões e reflexões no que diz respeito às atividades e avaliações que foram realizadas durante o primeiro semestre de 2013. O professor-pesquisador era o docente da turma e já tinha sido professor da maioria dos alunos nos semestres anteriores. Optamos, nessa escrita final da pesquisa, por não alterar nenhuma informação e análise referentes ao estudo exploratório. Consideramos que é importante para o professor-investigador, durante o seu caminhar no estudo de doutorado, refletir sobre seu desenvolvimento no processo investigativo. Dessa forma, tivemos a oportunidade de fazer uma releitura e reflexão mais cuidadosa sobre nossos critérios de pesquisa, do início até o final do doutorado individualmente e em conjunto com a orientadora. As análises e interpretações das informações do estudo exploratório foram realizadas entre junho e setembro de 2013. Algumas hipóteses foram delimitadas das discussões e reflexões feitas durante o doutorado em diversos momentos, especialmente com as análises desse estudo exploratório em 2013/2, e também com a interação com os colegas do doutorado e orientadora. A seguir apresentamos algumas de nossas hipóteses:

● Alguns estudantes ingressam no ensino superior com limitações de conteúdos matemáticos de aritmética e álgebra elementar;

● Alguns professores que atuam no ensino superior fazem poucas reflexões sobre a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado que o estudante universitário precisa ir adquirindo no ensino superior;

● Boa parte dos estudantes universitários acredita que com os hábitos de estudos que tiveram no ensino básico (fundamental e médio) eles conseguiriam superar os obstáculos enfrentados no ensino superior;

● Alguns estudantes universitários não têm consciência de que precisam mudar a ideia de que a matemática não é somente aplicação de fórmulas ou teoremas. Eles precisam passar por situações em sala de aula que os desafiem a generalizar, abstrair, resolver e elaborar diversos tipos de problemas.

4.1.1 Descrição da turma

A turma do estudo exploratório era formada por 38 estudantes, com idades que variavam de 18 a 25 anos. Eles estavam matriculados regularmente no primeiro semestre de 2013, na disciplina de Cálculo I, e 12 estudantes da turma já haviam cursado a disciplina no segundo semestre de 2012. Nesse estudo exploratório tínhamos, em média, 28 alunos que frequentavam regularmente, e terminamos o estudo com 26 alunos. Nas duas primeiras semanas, tivemos uma desistência de nove alunos.

Geralmente, alguns estudantes desistem das disciplinas extras (aquelas que eles estão frequentando pela segunda vez ou mais) porque há um confronto de horário com as disciplinas regulares, ou seja, as que os estudantes estão cursando pela primeira vez. Esse confronto acontece porque os horários das turmas extras são divulgados depois do horário das regulares. Além disso, os estudantes podem se matricular em quantas disciplinas desejarem, porque não existe um limite mínimo e nem máximo e nenhum tipo de orientação acadêmica é oferecida aos estudantes nesta fase de inscrição.

No Regulamento da Organização Didática (ROD) dos cursos de graduação do IFES, consideram-se três tipos de reprovação: (1) por nota, (2) por falta e (3) por nota e falta. Se o estudante ficar reprovado somente por critério de nota, ou seja, quando ele não consegue atingir uma média maior ou igual a 60%, é facultado a ele o direito de não assistir às aulas, quando repetir a disciplina. Os que se encontram nessa situação têm a opção de fazer somente as provas e atividades avaliativas.

Nesse estudo exploratório, procuramos coletar alguns dados para conhecer melhor quem eram os alunos da turma, em diversos aspectos. Os estudantes responderam, em 10/02/2013, a um questionário[28] (Ver Apêndice A) com informações sobre: i) Onde eles cursaram o ensino básico (fundamental e médio); ii) Como os estudantes acreditavam que era o rendimento deles em matemática nas séries anteriores;

---

[28] Esse questionário é o mesmo que foi utilizado para coleta das informações sobre os alunos na pesquisa definitiva.

iii) Quantas vezes eles repetiram a disciplina de Cálculo I; iv) Conteúdos de matemática que eles mais e menos gostaram de estudar. Essas informações e características nos ajudaram a compreender um pouco do seu comportamento como aluno de matemática na educação básica e na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

A seguir, trazemos algumas dessas informações da turma do estudo exploratório, organizadas em tabelas (Tabela 1 e Tabela 2) e gráfico (Figura 8).

I) Informações sobre o tipo de instituição em que os estudantes frequentaram o ensino básico (ensino fundamental e médio).

Tabela 1 – Local de estudos na escola básica

	E. Fundamental	**E. Médio**
Escola Pública	19	18
Escola Particular	7	8
TOTAL	**26**	**26**

Fonte: Acervo pessoal do pesquisador, 2014.

As turmas são formadas predominantemente de estudantes provenientes de escolas públicas, e verificamos que mais de 70% dos estudantes da turma cursaram tanto o ensino fundamental quanto o médio em escolas públicas. A forma de acesso aos cursos superiores no Instituto Federal do Espírito Santo é exclusivamente pelo Sistema de Seleção Unificada (SISU), a partir da nota do aluno no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

II) *Como era o desempenho deles em matemática no ensino básico (ensino fundamental I, II e ensino médio).*

Tabela 2 – Desempenho em matemática no ensino básico

	E. Fundamental	**E. Médio**
Ótimo	8	1
Bom	13	5
Regular	5	18
Ruim	0	2
TOTAL	**26**	**26**

Fonte: Acervo pessoal do pesquisador, 2014.

Utilizamos a escala de ótimo, bom, regular e ruim para que os estudantes pudessem descrever seu desempenho no ensino fundamental e no ensino médio. Foi importante observar que a maioria dos alunos julgou o seu desempenho em matemática no ensino fundamental como satisfatório. Observamos que 8 alunos dos 26, aproximadamente 31%, responderam como ótimo, e 13, como bom, ou seja, 50%, e regular, 5 aproximadamente 19%. Podemos nos arriscar a dizer que os alunos estavam satisfeitos com o rendimento deles em matemática no ensino fundamental.

Quando olhamos as informações do ensino médio, a maioria dos estudantes avaliou seu desempenho como bom ou regular, prevalecendo agora o regular para a maioria deles. Será que esses alunos estavam nos dando alguma pista de que, quando avançam seus estudos em matemática eles percebem uma ligeira queda em seu desempenho? Será que para eles os conteúdos de matemática iam ficando mais difíceis de ser compreendidos ou aprendidos? Ou será que eles iam perdendo o interesse? Estávamos conscientes de que precisávamos de mais detalhes sobre a formação inicial desses estudantes, e também de usar outros instrumentos que pudessem nos dar mais informações.

Uma vez que não tínhamos o objetivo de responder às perguntas mencionadas, não nos aprofundamos nesses questionamentos. No entanto, acreditamos que algumas dessas informações nos ajudariam a compreender algumas limitações que eles apresentaram de conteúdos dos ensinos fundamental e médio.

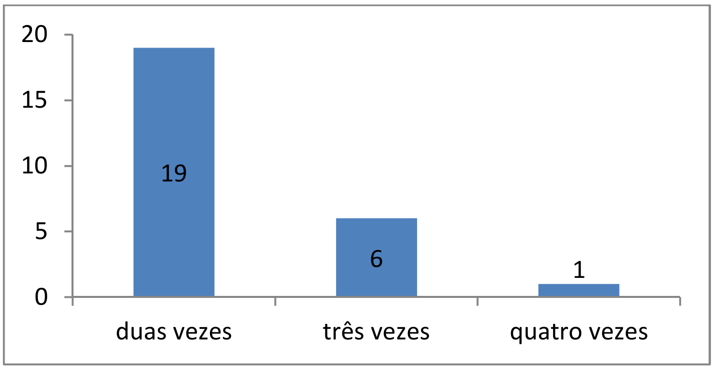
III) Conteúdos de matemática que eles mais gostaram e que menos gostaram de estudar no ensino básico.

Listando os conteúdos que os estudantes mais gostavam os que mais apareceram foram os estudos de equações e funções de 1º e 2º graus. Em contrapartida, o conteúdo que eles menos gostavam foi bem perceptível. Muitos disseram que não gostaram de estudar trigonometria. Sabemos que não teríamos condições de afirmar que não gostar de trigonometria no ensino médio significa não gostar de trigonometria no ensino superior. Mesmo não sendo possível fazer essa relação, vale a pena informar que observamos muita dificuldade dos estudantes em resolver tarefas, nos semestres anteriores, quando algum conteúdo de trigonometria era abordado nos conteúdos de limite, derivada e integral.

IV) Informações sobre número de vezes que os estudantes da turma do estudo exploratório ficaram reprovados na disciplina de Cálculo I.

Na Figura 8 é mostrada a quantidade de vezes que os estudantes dessa turma ficaram reprovados na disciplina de Cálculo I.

Figura 8 – Gráfico do número de vezes que os estudantes ficaram reprovados em Cálculo I



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador, 2014.

Analisando as informações contidas no gráfico, podemos observar que a maioria dos alunos estava frequentando pela segunda vez a disciplina de Cálculo I. Com essa turma de estudantes repetentes, tentamos utilizar estratégias diferentes das utilizadas em turmas anteriores. Formamos pequenos grupos de estudos, diversificando os componentes dos grupos de acordo com a quantidade de vezes em que cada um havia ficado reprovado. Procuramos envolver os estudantes que estavam repetindo a disciplina pela quarta vez com os estudantes que estavam repetindo pela terceira e pela segunda vez, de maneira que todos pudessem refletir sobre quais eram os motivos que levaram a isso. Era um momento em que favorecíamos um diálogo sobre a maneira com a qual eles poderiam colaborar para a aprendizagem uns dos outros.

4.1.2 Atividades, avaliações e reflexões com a turma

De maneira semelhante aos semestres anteriores, na primeira aula apresentamos aos estudantes a ementa da disciplina de Cálculo I e algumas propostas de trabalho para o semestre com relação à disciplina. Tínhamos consciência de que não poderíamos trabalhar da mesma forma que trabalhamos no semestre anterior, pois os resultados anteriormente não foram satisfatórios, ficando mais de 70% (22 alunos de 31) dos alunos da turma reprovados no semestre (2012/2) anterior. A proposta pedagógica usada nos semestres anteriores tinha seguido uma lógica de didática tradicional. Explicávamos os conteúdos apresentando as definições, teoremas, exemplos resolvidos no quadro pelo professor, listas com muitos exercícios, correção das respectivas listas no quadro e avaliações com base nessas listas. Envolvíamos muito pouco o estudante no processo de ensino e aprendizagem.

A proposta inicial da ementa da disciplina seguiu o plano de curso. Os conteúdos abordados foram: a) uma revisão dos conteúdos matemáticos dos ensinos fundamental e médio que apresentassem uma relação direta com os conteúdos de Cálculo I, em horário extraclasse; b) limite e continuidade; c) derivada; d) aplicações da derivada. A partir das experiências com turmas anteriores de Cálculo I, foram consideradas algumas dificuldades e limitações com conteúdos da matemática básica que os alunos apresentaram em provas e listas de exercícios.

A partir das dificuldades apresentadas pelos estudantes, nós planejamos uma revisão de três blocos de conteúdos do ensino básico. Primeiro, revisamos conteúdos de álgebra elementar: potenciação, radiciação, produtos notáveis, fatoração de expressões algébricas, simplificação de frações algébricas. Depois revisamos e estudamos conjuntos, números reais, e funções elementares (constante, linear, 1º e 2º graus, exponenciais e logarítmicas). Finalizamos essa etapa de revisões com o estudo de tópicos de Geometria Analítica: distância entre dois pontos, equações de reta e da circunferência.

Para trabalhar os conteúdos de revisão, dos ensinos fundamental e médio descritos, foram utilizadas aproximadamente dezoito aulas de 50 minutos para a explicação, atividades avaliativas e provas. Esses conteúdos da matemática foram avaliados como valendo 20% do total da nota. Os resultados nessas avaliações não foram satisfatórios.

Entretanto, convém destacar que no momento em que apresentávamos a ementa da disciplina de Cálculo e a proposta de trabalho, alguns alunos da turma solicitaram que, se fosse possível, iniciássemos o curso com os conteúdos específicos de Cálculo. A justificativa para esse pedido foi que essa revisão já tinha sido feita em semestres anteriores. Eles acreditavam que o problema do baixo rendimento da turma na disciplina de Cálculo I não era atribuído aos conteúdos da matemática básica, mesmo reconhecendo sua importância. Depois dessa justificativa dos estudantes, resolvemos iniciar com o conteúdo de limite de funções. Adaptamos a revisão dos conteúdos do ensino médio de uma maneira mais sucinta e optamos por fazer a revisão dos conteúdos do ensino médio de forma paralela aos conteúdos específicos de Cálculo.

Criamos um reforço paralelo, em horário extracurricular, no qual os estudantes traziam suas dúvidas, angústias e dificuldades relacionadas aos conteúdos estudados. Reservamos um tempo específico para que os alunos comentassem seus resultados em provas e testes avaliativos. Alguns aproveitavam para pontuar em que precisavam melhorar. Enfim, passamos a ouvi-los mais e iniciamos nossa aprendizagem em auscultar os estudantes como sugere Lorenzato (2010).

4.1.3 Aprendizagens e reflexões do professor-pesquisador

A realização desse estudo exploratório foi de suma importância para o desenvolvimento posterior da pesquisa definitiva. Gostaríamos de destacar algumas reflexões e aprendizagens do estudo exploratório que foram incorporadas no estudo definitivo. Dentre as várias experiências destacamos:

a) A importância e as vantagens que nós, professores, podemos tirar quando conseguimos conhecer melhor nossos estudantes em vários aspectos como: i) a caminhada deles, enquanto alunos de matemática, nos anos anteriores; ii) o que eles gostaram ou não de estudar em matemática anteriormente; iii) o porquê da escolha do curso; iv) quais são seus hábitos de estudos; v) relação afetiva e cognitiva com a matemática e (vi) a tomada de consciência dos estudantes a respeito desses aspectos.

b) A necessidade de ter um melhor planejamento das atividades de coleta de dados, de transcrição e organização de informações.
c) Reconhecer que a transcrição das informações coletadas, as análises e reflexões tomam muito mais tempo do que imaginamos.
d) Conseguimos perceber que, com essa turma do estudo exploratório em 2013/1, a estratégia de fazer a revisão dos conteúdos da matemática básica, em paralelo com os conteúdos de cálculo, funcionou melhor do que fazer a revisão isolada.
e) Fizemos uma coleta de dados sobre o conteúdo de derivada, e foi possível notar que muitos deles desistiam do curso muito antes de chegar a esse conteúdo.
f) O professor universitário que trabalha com turma de estudantes repetentes precisa ficar focado não só em aspectos cognitivos da aprendizagem de conceitos matemáticos, mas também em aspectos afetivos. Acreditamos que se faz necessário resgatar a autoestima dos estudantes, tentar passar a ideia de que eles são capazes de superar suas limitações, ou seja, é preciso trabalhar o cognitivo e o afetivo em concomitância.
g) Precisamos adotar, com esses estudantes repetentes, uma prática de sala de aula diferente. Devemos demonstrar que estamos preocupados com seu rendimento. Nós, professores universitários, precisamos oportunizar momentos, no planejamento do curso, para que eles possam ter a oportunidade de externar o que já sabem do assunto, o que ainda não sabem, assim como verbalizar suas limitações, suas dúvidas e seus questionamentos.
h) É importante, na primeira semana, verificar o que os estudantes repetentes efetivamente aprenderam e o que eles não aprenderam dos conteúdos de Cálculo no semestre anterior. Essa informação pode ser obtida com a aplicação de uma atividade diagnóstica, com tarefas que envolvam conceitos elementares e relevantes.
i) Vale a pena ressaltar que, até a experiência com esse estudo exploratório, nós, professores, nunca tivemos a preocupação de tentar conhecer melhor

quem eram esses estudantes. Sempre mantivemos uma postura distante da realidade do nosso aluno, ou seja, não nos interessava se tinham ou não uma boa relação com a matemática. Nossa missão de professor universitário se resumia em transmitir os conteúdos para eles da melhor maneira possível. Veja que usamos a expressão "*transmitir os conteúdos*", pois acreditávamos numa concepção de professor como transmissor do conhecimento como comenta Santos (1997).

j) Com as interpretações e análises das atividades desse estudo exploratório, constatamos que não tínhamos nenhum critério de correção das atividades e provas. Procurávamos focalizar somente no resultado final da questão, ou estava tudo correto, ou era marcado zero. Não nos interessávamos pelo caminho que o aluno percorreu para a resolução da questão, o que nos interessava era exclusivamente o resultado final da questão.

Gostaríamos de destacar que boa parte das estratégias de coleta de dados utilizadas na pesquisa definitiva surgiu a partir das experiências vividas com o estudo exploratório. Com essa experiência, definimos nosso tema de estudo definitivo, e decidimos focalizar o nosso olhar no conceito de limite de funções.

4.2 ESTUDO DEFINITIVO

4.2.1 Caracterização da turma

Essa pesquisa de campo definitiva foi realizada no primeiro semestre de 2014, em uma turma extra[29] formada exclusivamente por estudantes repetentes da disciplina de Cálculo I do IFES-Campus Itapina. A turma era formada por 38 estudantes dos cursos de Bacharel em Engenharia Agronômica e Licenciatura em Ciências Agrárias. A carga horária semanal, em 2014/1, era de quatro aulas de 50 minutos cada.

As aulas ocorriam em um horário no contraturno das outras disciplinas regulares. Ademais, criamos um horário extra de atendimento, intitulado Projeto Cálculo, para

[29] Essa turma foi criada especificamente por estudantes repetentes porque, na instituição havia uma quantidade significante de estudantes que ficaram reprovados em Cálculo nos semestres anteriores.

essa turma com mais duas aulas de 50 minutos semanais. O objetivo foi tirar dúvidas de conteúdos específicos de Cálculo ou matemáticos dos ensinos fundamental e médio. Além disso, preparamos tarefas variadas para revisarmos aqueles que fossem pré-requisito direto para o estudo de Cálculo. Por exemplo, fatorações e simplificações de expressões algébricas, gráficos das funções elementares (função constante, função do 1º grau, função do 2º grau, função modular). Nesse horário adicional participavam em média, 20 alunos.

Tínhamos como objetivo, nesse atendimento extra para os alunos repetentes, procurar conhecê-los melhor, criar uma relação de proximidade com eles. Queríamos observar como eles pensavam e resolviam tarefas sobre os conteúdos de Cálculo e verificar seus acertos e erros nas atividades de aulas, listas de exercícios e provas, quando faziam novamente alguns itens. Enfim, desejávamos procurar entender quais as dificuldades e obstáculos apresentavam para estudar e aprender os conteúdos da disciplina de Cálculo I, e, em especial, sobre o tema limite.

De maneira semelhante ao estudo exploratório, verificamos que era importante procurar conhecer melhor esses estudantes repetentes em vários aspectos como: i) conhecimentos matemáticos elementares e de Cálculo; ii) hábitos de estudos; iii) expectativas deles com o curso; iv) motivação que eles tinham para estudar e outros aspectos que observamos durante nossas conversas informais na sala de aula e nos corredores da instituição. Com essa ação de tentar conhecer e compreender melhor quem eram esses estudantes repetentes, nós, professores universitários, conseguimos ganhar um pouco mais a confiança deles. Acreditamos que, com isso, foi possível fazer um trabalho diferenciado, levando em consideração os aspectos citados.

Nessa turma, tínhamos 32 alunos do curso de bacharel em Engenharia Agronômica e 6 do curso de Licenciatura em Ciências Agrárias (LICA). Nas quatro primeiras semanas, oito (8) já haviam desistido de fazer a disciplina, sete da Engenharia Agronômica e um aluno da Licenciatura. Tentamos entrar em contato com eles para conversar sobre os motivos que os levaram a desistir de cursar a disciplina novamente. Tivemos êxito com apenas três deles que desistiram após uma semana de aula em fevereiro de 2014/1. Os motivos foram os mais variados. Dois alegaram problemas com o conflito de horário da disciplina de Cálculo I com as disciplinas regulares. Outro alegou que estava priorizando estudar para outras disciplinas em que ele já havia ficado reprovado. Perguntamos para os que continuaram a frequentar as aulas de Cálculo se eles sabiam quais eram os motivos que levaram os demais colegas a desistirem. Eles justificaram que muitos, quando percebem que não vão dar conta das disciplinas extras, simplesmente abandonam sem nenhuma comunicação devida.

No quadro 1, apresentamos as informações coletadas a partir do questionário 2 (Ver Apêndice A), respondido por apenas 30 alunos da turma em 2014/1, sobre os retrospectos dos estudantes da pesquisa definitiva em relação à disciplina de Cálculo I nos semestres anteriores.

Quadro 1 – Descrição dos alunos que ficaram reprovados em Cálculo I

	Ano/semestre em que frequentaram anteriormente	**Número de alunos**
Alunos que estão repetindo a disciplina pela segunda vez.	2013/2	22
Alunos que estão repetindo a disciplina pela terceira vez.	2013/1 2013/2	7
Alunos que estão repetindo a disciplina pela quarta vez.	2011/2 2012/2 2013/1	1
TOTAL		**30**

Fonte: Elaborado pelo pesquisador (2014)

A partir das conversas informais com os estudantes, no dia em que foram aplicados os questionários 1 e 2 (Ver Apêndice A), sobre como havia sido o desempenho deles em Cálculo I no semestre anterior, foi possível verificar que, dos 22 alunos que frequentaram a disciplina de Cálculo I em 2013/2, 14 relataram que não haviam frequentado o curso até o final. Os alunos frequentaram o curso de Cálculo I até a primeira avaliação sobre o assunto de limites. Como eles não tinham conseguido uma nota suficiente e não estavam acompanhando o que estava sendo explicado, resolveram abandonar a disciplina. Os outros 8 foram até o final do curso e fizeram, inclusive, a prova final. Todos os alunos que estavam repetindo a disciplina pela terceira ou quarta vez informaram que já haviam frequentado durante todo o semestre por, pelo menos, uma vez.

Com base nessas informações em conversas informais com estudantes dentro e fora da sala de aula, e a partir das leituras de trabalhos sobre desempenho dos alunos na disciplina de Cálculo I, passamos a nos perguntar: 1) O que os tem levado a desistirem do curso de Cálculo I, antes mesmo de frequentar 33%[30] da carga horária do curso? Será que isso se dá exclusivamente pela dificuldade que alguns alunos têm dos conteúdos abordados no início do curso? Ou será que existem outros fatores, como, medo da disciplina ou dos professores?

4.2.2 Perfil dos estudantes

A turma que participou até o final da pesquisa era formada por 30 estudantes. Vinte e oito tinham idade entre 18 e 24 anos de idade, um tinha 26 anos e outro 45 anos de idade. Quase todos cursaram o ensino fundamental e o médio na rede pública de ensino. Somente um frequentou em escolas particulares. Eles eram provenientes de várias cidades do Espírito Santo, cidades do sul da Bahia, cidades do leste de Minas Gerais e cidades do norte do Rio de Janeiro. O processo seletivo para a admissão nos cursos de graduação do IFES é feito pelo Sistema de Seleção Unificada (Sisu). Como é feita em nível nacional, isso proporciona a vinda de estudantes de vários estados para o campus Itapina, principalmente da região Sudeste.

4.2.3 Ética na pesquisa

Durante todas as fases da pesquisa, desde o primeiro contato com o professor-colaborador e até o nosso relatório final, tivemos a preocupação em preservar a identidade dos sujeitos envolvidos. Todos os participantes assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Ver Apêndice J). Ninguém foi forçado ou persuadido a participar em qualquer parte do estudo, e todos foram informados de que a participação não era obrigatória e que poderiam se afastar da pesquisa em

[30] Esse valor foi estimado analisando-se os planos de ensino da disciplina de Cálculo I no IFES. Foi possível constatar, no planejamento dos professores, que as primeiras avaliações acontecem aproximadamente depois de dois meses de curso.

qualquer momento. Suas identidades foram protegidas com códigos em todo o material utilizado na pesquisa.

Os estudantes e o professor-colaborador receberam vários retornos sobre nossas escritas e interpretações. Nosso objetivo era que todos pudessem rever, refletir sobre e usar as informações contidas nas tarefas e em nossas interpretações. Acreditamos que esses retornos francos com todos os envolvidos na pesquisa poderiam auxiliar a aprendizagem deles e permitir-lhes, também, se beneficiarem do estudo.

4.2.4 Seleção dos sujeitos

Selecionamos três estudantes (A1, A13 e A19)[31] para interpretar, em detalhes, seus dados da pesquisa definitiva. A turma que frequentou a disciplina até o final era formada por 25 alunos do curso de Agronomia e 5 da Licenciatura em Ciências Agrárias. Selecionamos, por critério de proporcionalidade, dois do curso de Agronomia e um de Licenciatura. Além do critério de proporcionalidade, utilizamos outros quatro critérios, que foram:

i) participação efetiva em todas as etapas da pesquisa definitiva;

ii) responderam a todos os instrumentos aplicados;

iii) frequentaram assiduamente os horários extras de estudos;

iv) apresentaram rendimento abaixo de 50%[32] na disciplina de Cálculo I nos semestres anteriores;

v) demonstraram, desde o início do curso, que estavam se esforçando para superar suas dificuldades.

---

[31] Melhores informações sobre o caminhar desses estudantes na pesquisa encontram-se no capítulo de análise.

[32] Informação coletada junto ao Registro Acadêmico a partir das atas de resultados finais da disciplina de Cálculo I.

4.2.5 Professor regente/colaborador

Preocupados em manter o sigilo ético necessário na pesquisa, identificaremos o professor regente como professor colaborador. As informações referentes ao colega professor-colaborador foram fornecidas a partir de nossas conversas informais, que ocorreram durante nossos encontros para planejamentos das aulas e dos instrumentos aplicados na pesquisa. Elas foram transcritas no caderno de bordo do pesquisador.

O professor-colaborador é um jovem professor, com aproximadamente 30 anos de idade. Ele é casado e tem um filho. Sua primeira experiência no magistério foi de 2011 a 2013, como professor-monitor das disciplinas de Física e Cálculo, em uma universidade particular na cidade de Vitória, ES. Depois disso, em 2013, passou no concurso para professor de Física no IFES-Campus Itapina, assumindo em 2014. A turma de estudantes repetentes de 2014/1 foi a primeira com a qual trabalhou como professor regente da disciplina de Cálculo I. Ele é formado em Bacharelado em Física pela Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), desde 2007. Cursou pós-graduação em Física em nível de Mestrado, de 2007 a 2009, e Doutorado de 2009 a 2013, também na UFES. Tem experiência na área de Física, com ênfase em Física Teórica relacionada à Teoria Quântica de Campos e na área de Relatividade Geral. Apesar da sua formação em Física, ministrava a disciplina de Cálculo porque os professores com formação em Matemática já estavam com suas cargas horárias acima do limite permitido.

A partir das observações que fizemos das aulas dele, pudemos perceber que ele se comunica com expressividade, possui um tom de voz variado. É muito eficiente na gestão do tempo das aulas. Explica os conteúdos em profundidade. Apresenta suas ideias bem organizadas no quadro da sala de aula. Incita os alunos a participarem das aulas e consegue fazer ligação da disciplina de Cálculo I e da Física com muita facilidade. Acreditamos que isso seja devido à sua formação. Procurava utilizar listas com muitos exercícios para dinamizar as aulas e orientar os alunos em seus estudos.

4.2.6 Entrevista com os sujeitos selecionados

Realizamos posteriormente, com os estudantes selecionados (A1, A13 e A19) uma entrevista (Ver Apêndice H), para tentar verificar o que eles se lembravam sobre limite de funções e sobre sua caminhada durante a pesquisa. Ela foi dividida em dois momentos: no primeiro, queríamos saber o que esses estudantes se lembravam do conteúdo de limite de funções. Inicialmente, perguntamos a definição de limite de função. Eles responderam isso sem nenhum material para consultar. Depois devolvemos para eles cópias das suas atividades realizadas durante a pesquisa e deixamos que eles consultassem esse material por aproximadamente, 15 minutos. Depois, pedimos a eles que respondessem novamente algumas questões referentes a limite de funções (Ver Apêndice H).

No segundo momento, ocorreu uma conversa mais informal sobre os seguintes assuntos:

a) O desempenho deles na disciplina de Cálculo I no que diz respeito às atividades e avaliações.
b) Pedimos a esses estudantes que pontuassem o que eles acharam que funcionou ou não na pesquisa. Enfim, perguntamos: Em quais aspectos a pesquisa ajudou ou não na sua aprendizagem?
c) Quais seriam as recomendações que eles dariam para um estudante que pretende estudar a disciplina de Cálculo I.
d) Quais seriam as sugestões que eles dariam para nós, professores universitários, para que pudéssemos ajudar outros alunos de Cálculo I.
e) O que os motivava a estudar?
f) Se eles conseguiam ver alguma conexão dos conteúdos com o curso de Agronomia e com o curso de Licenciatura em Agronomia.

Algumas respostas dessas entrevistas foram utilizadas para a análise sobre o conceito que os estudantes apresentaram a respeito de limite de funções. Também usamos parte das respostas para a seção sobre matemática emocional.

4.3 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE

Em nossa pesquisa, consideramos e analisamos três componentes do processo de ensino-aprendizagem, que acreditamos estar interligados e que julgamos essenciais na aprendizagem matemática. O primeiro foi a afetividade em matemática, que está relacionada com os dois primeiros objetivos da pesquisa e nos ajudou a responder às perguntas do bloco A mencionadas no capítulo 2. Os procedimentos metodológicos que aconteceram na pesquisa para procurar compreender como aspectos de afetividade interferem nos processos de ensino, aprendizagem e avaliação, ou seja, para buscar compreender como enxergar afetividade em matemática, e/ou compreender inter-relações entre afetividade e os processos de ensinar, aprender e avaliar em matemática, e assim responder aos questionamentos do estudo foram:

(i) observações de aulas do professor-colaborador nas primeiras semanas e registros no diário de bordo;
(ii) conversas informais com os estudantes nas primeiras semanas e na entrevista final;
(iii) aulas ministradas pelo professor-pesquisador nos horários regulares da disciplina de Cálculo I e nos horários extras e registros do pesquisador no caderno de bordo;
(iv) questionários 1 e 2 (Ver Apêndice A.) aplicados na segunda semana de fevereiro;
(v) entrevistas ao final da pesquisa; e
(vi) teste diagnóstico.

Os dois últimos componentes referem-se aos conteúdos específicos de Cálculo. Aqui consideramos as dificuldades de aprendizagem e as dificuldades epistemológicas do conceito de limite de funções. Esses dois estão relacionados aos objetivos três e quatro e às perguntas do bloco B já citadas também no capítulo 2. Os procedimentos metodológicos que aconteceram na pesquisa para procurar compreender esses componentes e assim responder aos questionamentos da investigação foram:

(i) observações de aulas do professor-colaborador em que foram trabalhadas o tema limite de funções com registros no diário de bordo;

(ii) conversas informais com os estudantes nas aulas de reforço nos horários extras e os instrumentos de pesquisa da 2ª etapa até a 8ª etapa (Ver Apêndice G) e na entrevista final;

(iii) aulas ministradas pelo professor-pesquisador nos horários regulares, quando substituímos o professor-colaborador, e nos horários extras, e registros do pesquisador no diário de bordo;

(iv) entrevistas ao final da pesquisa; e

(v) teste diagnóstico.

Para analisar e interpretar as respostas dos estudantes, e assim tentar responder aos questionamentos e atingir os objetivos da pesquisa, nós realizamos várias leituras, organizamos todas as informações transcritas e trocamos ideias com a orientadora em diversos momentos. Buscamos identificar e compreender as informações, procurando respostas semelhantes e contraditórias. Assim, procuramos nos dados, indícios de informações que nos permitissem inferir que atingimos nossos objetivos. Esses procedimentos nos levaram a codificar e categorizar as informações para poder interpretar as mesmas à luz de alguns autores. Esse processo de análise de dados foi um processo longo e lento que aconteceu desde as etapas iniciais de coleta. Constatamos, desde as fases iniciais de transcrição, organização, e categorização de dados, leituras sucessivas dessas informações, e sistematização de interpretações e achados no estudo, que todas essas etapas se inter-relacionam e interferem nos procedimentos de análise. Observamos também que foram cruciais para concluir estas etapas, leituras sucessivas e reflexões constantes a respeito dos dados transcritos, organizados, categorizados e interpretados, assim como conversas e reflexões com a orientadora, e várias releituras de pesquisas que nos auxiliaram a contextualizar a pesquisa. Esse longo caminhar para interpretar dados e informações do estudo nos confirmaram que de fato se aprende a investigar enquanto se investiga e se procura ir sistematicamente refletindo e questionando os dados que vamos analisando.

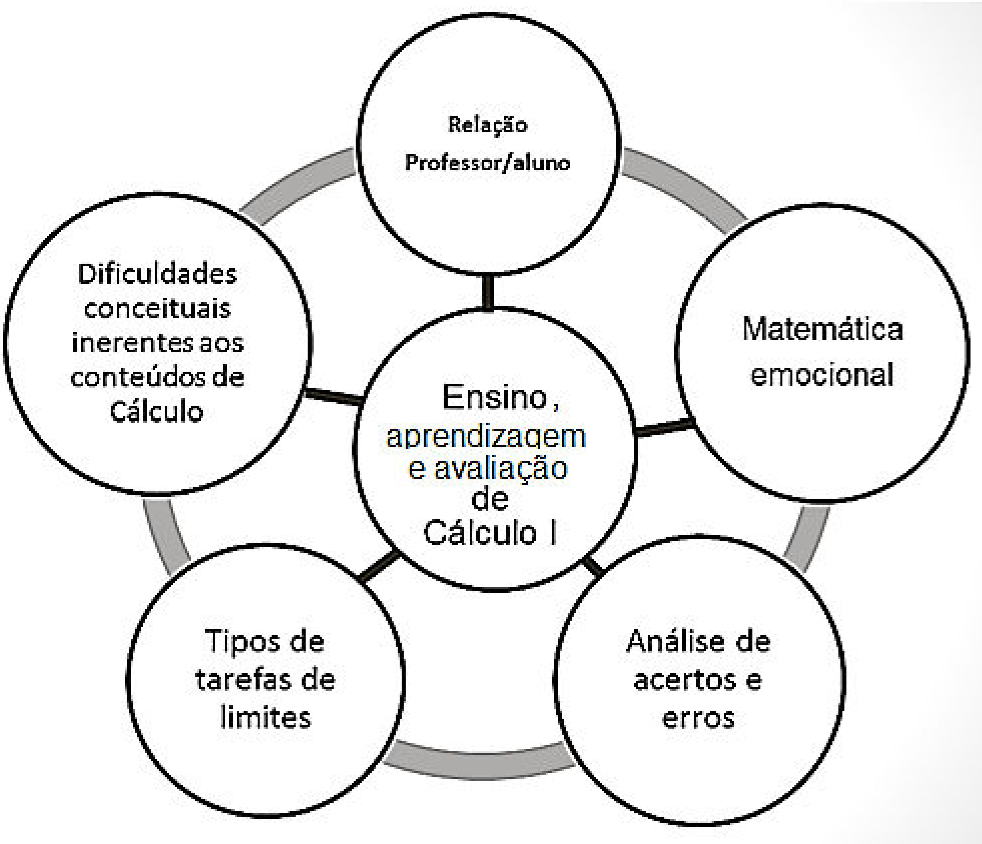
5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

> As subjetividades do pesquisador e daqueles que estão sendo estudados são parte do processo de pesquisa. As reflexões dos pesquisadores sobre suas ações e observações no campo, suas impressões, irritações, sentimentos, e assim por diante, tornam-se dados em si mesmos, constituindo parte da interpretação (FLICK, 2004, p. 22).

Neste capítulo, trazemos nossas análises e interpretações dos dados do estudo definitivo. Isso aconteceu a partir das informações coletadas nos documentos produzidos pelos estudantes (questionários, tarefas e avaliações), nas entrevistas individuais, nos registros de observações das aulas e nos momentos de estudos extraclasse que foram criados para dar um suporte diferenciado. Todos esses dados e informações deram origem ao material transcrito ao longo de toda a trajetória da pesquisa no diário de bordo do pesquisador. Além disso, eles foram digitados e/ou fotocopiados em arquivos do pesquisador e compartilhados em todas as etapas com a orientadora.

Destacamos o que observamos da turma como um todo e o que identificamos dos três estudantes selecionados para focalizarmos em alguns aspectos. Optamos em contemplar, em nossas análises e observações, alguns componentes tais como: matemática emocional, relação professor/aluno, dificuldades conceituais inerentes aos conteúdos de Cálculo, tarefas de limites de funções de uma variável real e análise de acertos e erros das tarefas realizadas pelos estudantes. Acreditamos que considerar aspectos de matemática emocional, relação professor/aluno e dificuldades básicas de conceitos matemáticos, assim como os tipos de tarefas matemáticas, os acertos e erros estão no cerne do processo de ensino, aprendizagem e avaliação de Cálculo de estudantes repetentes. Cremos que, durante a nossa caminhada na pesquisa, foi possível verificar que passamos a considerar esses componentes nos processos de ensinar, aprender e avaliar Cálculo.

Figura 9 – Componentes analisados no processo de ensino, aprendizagem e avaliação de Cálculo I



Fonte: Elaborado pelo pesquisador (2015)

O nosso olhar para os *fatores emocionais* surgiram da necessidade de conhecer melhor os sujeitos participantes do estudo, com relação às suas crenças e expectativas acerca deles mesmos em relação à aprendizagem de Cálculo. Consideramos o importante papel da relação professor/aluno e aluno/professor na aprendizagem como uma mediação essencial; que evidenciou as características pessoais positivas e negativas de nossos alunos e também as nossas. Além disso, ouvimos a opinião deles acerca de nosso trabalho, e ponderamos a respeito de nossa capacidade de levar em consideração a diversidade existente em sala de aula. Tudo isso exigiu de nós, professores, suporte cognitivo e afetivo para poder pensar em formas alternativas de ensinar e interagir e assim possibilitar que ocorresse algum progresso na aprendizagem.

As análises das *produções (acertos e erros)* nas tarefas da pesquisa tiveram, como objetivo, compreender as dificuldades que traziam sobre as aprendizagens de limite de funções e serviram, também, para revermos a maneira como trabalhamos anteriormente com esse conteúdo. Ao examinar algumas limitações dos estudantes quando resolveram questões de limites nos foi possível elaborar algumas atividades que exploravam a construção do conceito de limite. Por exemplo, quando verificamos que os estudantes tinham dificuldades na resolução de questões de limites de funções que apresentavam uma indeterminação do tipo 0/0, passamos a refletir além do erro identificado e pensar sobre outros pontos de vista. Percebemos que algumas dificuldades deles tinham a ver com a complexidade do conceito de limite, e não somente com dúvidas sobre processos algébricos e aritméticos utilizados na resolução da questão.

5.1 CONHECENDO O PERFIL DA TURMA

Nesta seção, trazemos nossas análises e interpretações dos dois questionários (Apêndice A) aplicados à turma entre os dias 17 e 24 de fevereiro de 2014[33]. O principal objetivo da aplicação dos questionários foram os de obtermos informações da turma no que diz respeito a: i) hábitos de estudos; ii) expectativa de aprendizagem desses estudantes; iii) compreender causas e motivos do insucesso desses estudantes em Cálculo I. Com essa ação, de tentar conhecer e compreender melhor, conseguimos nos aproximar mais deles e, consequentemente, ganhamos um pouco mais da confiança deles.

Pareceu-nos que essa interação diferente, desde o início do semestre, motivou-os a seguirem inscritos na disciplina e os levou a acreditar que poderiam superar suas dificuldades de aprendizagem. Acreditamos que, com essa iniciativa e a disponibilização de um pouco mais de tempo para *auscultar*[34] (LORENZATO, 2010) esses estudantes, foi possível fazer um trabalho diferenciado, levando em consideração as informações citadas anteriormente.

---

[33] O estudante identificado como A30 não respondeu aos dois primeiros questionários aplicados dias 17 e 24 de fevereiro de 2014.

[34] Auscultar significa analisar e interpretar os diferentes tipos de manifestações do aluno (LORENZATO, 2010, p. 16).

Além dos questionários também usamos dados registrados no caderno de bordo do pesquisador e nas entrevistas. Por isso, durante o atendimento em horário extra, nós transcrevemos pequenos trechos de depoimentos dos estudantes. Após a coleta e análise dos dados em 2014, sentimos a necessidade de buscar mais detalhes sobre alguns instrumentos respondidos pelos estudantes. No início do ano letivo de 2015, selecionamos três estudantes para termos mais detalhes das respostas deles em alguns instrumentos da pesquisa. Fizemos uma entrevista individual com esses três estudantes por aproximadamente uma hora e meia. Nessa entrevista foi possível verificar a validade dos dados, tirar algumas dúvidas sobre suas respostas. Aproveitamos a entrevista para mostrar a eles o que já havíamos interpretado das suas respostas aos instrumentos da pesquisa.

5.1.1 Desempenho de matemática no ensino básico

Nessa turma com 38 universitários, tínhamos 32 do curso de bacharel em Engenharia Agronômica e 6 do curso de Licenciatura em Ciências Agrárias (LICA), regularmente matriculados na disciplina. Nas quatro primeiras semanas, oito (8) já haviam desistido, sendo sete da Engenharia Agronômica e um da Licenciatura. Tentamos entrar em contato para saber os motivos que os levaram a desistir de cursar a disciplina novamente. Conseguimos êxito de conversar apenas com três deles, após uma semana de aula, em fevereiro de 2014/1. Os motivos que eles alegaram para a desistência foram variados. Dois alegaram problemas com o seu horário individual do curso, pois não estavam conseguindo conciliar essa disciplina com as demais, pelo fato de ser extra. O outro alegou que resolveu não cursar a disciplina, naquele semestre, porque priorizou estudar outras disciplinas em que ele já havia ficado reprovado e que faziam parte do núcleo de matérias técnicas.

Essas atitudes dos estudantes, que abandonam rapidamente a disciplina de Cálculo, acarretam um problema para a instituição. Esses oito, que desistiram de seguir cursando, causam problema porque entram na contagem de alunos retidos nessa disciplina mais uma vez. Geram assim um custo a mais para a instituição, com o aumento da demanda de carga horária dos professores nos próximos semestres. Ademais, eles acabam a gerar custos maiores para a instituição, pois irão demorar muito mais tempo para integralizarem todos os créditos de seus currículos universitários.

Assim a turma de 30 estudantes, que participou de toda a pesquisa, era formada por vinte e oito universitários com idades variando entre 18 e 24 anos, um com 26 anos e um com 45 anos de idade. Quase todos os alunos (29) cursaram o ensino fundamental e o médio na rede pública de ensino. Somente um frequentou escolas particulares.

Trazemos, no quadro 2, um resumo das avaliações que os estudantes apresentaram sobre o seu desempenho em matemática em anos anteriores. Sabemos que cada estudante é diferente, tem sua própria personalidade, jeito e tempo de aprender. Considerando, portanto, os diversos fatores da aprendizagem, estávamos diante de uma turma heterogênea. Tínhamos consciência de que, ser um bom aluno, às vezes pode não estar relacionado exclusivamente ao desempenho acadêmico, mas, sim, à maneira como o estudante aproveita a oportunidade de aprendizagem que a instituição de ensino tem a lhe oferecer. Entretanto, o nosso objetivo, com essas primeiras perguntas do questionário 1 (Apêndice A), foi levar os estudantes a refletirem sobre sua caminhada até aquele momento, em relação à sua aprendizagem de matemática.

Dessa maneira, optamos em criar uma escala de desempenho em relação à matemática como ótimo, bom, regular e ruim. Antes que eles respondessem, conversamos um pouco com a turma sobre o que nós pensamos e acreditamos que seria cada uma das classificações acima, e os alunos também colaboraram com as definições abaixo. Chegamos às seguintes definições com relação ao desempenho dos estudantes nas séries escolares anteriores ao ensino superior:

Seria considerado como ***ótimo*** o aluno que: i) possuía um desempenho acadêmico acima de 85%; ii) tivesse e se mostrava disposto a aprender matemática; iii) conseguia expor de maneira clara os conteúdos que aprendeu; iv) possuísse um espírito investigativo e confiava em si mesmo na resolução de problemas rotineiros e não rotineiros; v) investisse mais tempo em refletir sobre os vários tipos de problemas e estivesse sempre motivado nos aspectos conceituais; e vi) possuísse disciplina em estudar os conteúdos matemáticos. O estudante considerado ***bom*** seria aquele que: a) possuísse desempenho acadêmico maior que 70% e menor que 85%; b) tivesse interesse e se mostrava disposto a aprender matemática; c) procurasse progredir e reconhecia suas limitações em matemática; d) resolvesse com facilidade problemas rotineiros; e) não precisasse da ajuda de nenhum colega para desenvolver suas atividades.

Combinamos, também, que seria ***regular*** o estudante que: 1) possuísse um desempenho acadêmico de 50% a 70%; 2) em determinados conteúdos, necessitasse da ajuda constante de colegas e do professor; 3) resolvesse os exercícios que priorizassem a memorização, as regras e as fórmulas; e 4) se preocupava em entender os procedimentos e conceitos matemáticos básicos. Já o estudante considerado **ruim** seria aquele que: a_1) possuísse um rendimento inferior a 50%; a_2) não se preocupasse em sanar suas dúvidas e dificuldades com colegas e professores; a_3) procurasse estudar sempre na véspera das provas e não conseguisse os resultados desejados; a_4) participasse pouco das aulas; a_5) não tivesse hábitos de estudos regulares, isto é, não estudasse regularmente; e a_6) desistisse com facilidade, quando alguma tarefa exigisse um pouco mais de dedicação.

Quadro 2 – Desempenho em matemática básica

Estudantes que mantiveram suas opiniões sobre seu desempenho em matemática na passagem do ensino fundamental para o ensino médio. Dentro desse grupo temos estudantes que apontaram uma postura de sucesso e estudantes que apontaram uma postura de fracasso.	
Ensino Fundamental (**ótimo**) e Ensino Médio (**ótimo**)	A26 e A14
Ensino Fundamental (**bom**) e Ensino Médio (**bom**)	A15, A24, A18, A27, A5 e A25
Ensino Fundamental (**ruim**) e Ensino Médio (**ruim**)	A7, A10
Estudantes que acreditam que melhoraram seu desempenho em matemática na passagem do Ensino Fundamental para o Ensino Médio.	
Ensino Fundamental (**regular**) e no Ensino Médio (**ótimo**)	A16
Ensino Fundamental (**regular**) e no Ensino Médio (**bom**)	A19
Ensino Fundamental (**ruim**) e no Ensino Médio (**regular**)	A3, A1 e A20
Estudantes que acreditam terem piorado seu desempenho em matemática na passagem do Ensino Fundamental para o Ensino Médio.	
Ensino Fundamental (**ótimo**) e no Ensino Médio (**bom**)	A28 e A6
Ensino Fundamental (**bom**) e no Ensino Médio (**regular**)	A2, A13, A23, A22, A9, A17, A8 e A21

Ensino Fundamental (**regular**) e no Ensino Médio (**ruim**)	A4
Ensino Fundamental (**bom**) e no Ensino Médio (**ruim**)	A11 e A12
Observação: Os estudantes A29 e A30 não responderam a esse questionamento.	

Fonte: Elaborado pelo pesquisador (2014)

Ao analisar as informações do quadro 2, podemos verificar que 12 estudantes, de um total de 28, sinalizaram de forma positiva o seu desempenho em matemática nas séries anteriores. Vamos considerar, nesse grupo de estudantes, aqueles que mantiveram o seu conceito de ótimo para ótimo, bom para bom e aqueles que acreditaram que evoluíram o seu desempenho na transição do ensino fundamental para o médio, porque foi importante para nós essa verificação. Assim, como Gómez Chacón (2003), nós acreditamos que as crenças sobre a aprendizagem de matemática dos estudantes é um fator importante em termos de motivação. E o fato de levarmos esses estudantes a refletirem sobre seu desempenho nos trouxe indícios de que os jovens universitários são conscientes das explicações sobre o sucesso e o fracasso deles em matemática. Com esses dados em mãos, procuramos indagar se as barreiras de aprendizagem poderiam estar na falta de desenvolvimento de atitudes de valorização da disciplina, se em aspectos de relação afetiva com a matemática ou se na nossa forma de ensinar. Segundo Gómez Chácon (2003):

> Normalmente, o professor tenta buscar razões que justifiquem por que os estudantes “falham” ao aprender matemática. As dificuldades que implicam tanto aprender como ensinar matemática podem ter sua origem nas atitudes dos alunos em relação à matemática, na natureza dessa ciência, na linguagem e na notação matemática e no modo de aprender dos alunos. Parece pertinente não só aprofundar-se cada vez mais nas exigências cognitivas para a aprendizagem, mas, também, e especialmente, nas exigências afetivas (GÓMEZ CHACÓN p. 25).

Para nós, o termo crença em relação à matemática (o objeto) e seu ensino é um componente subjetivo do indivíduo (MCLEOD, 1992) que, de certa forma, foi desenvolvido em sua mente e está condicionado às experiências vivenciadas por esse indivíduo ao longo de sua trajetória escolar com sucessos e/ou fracassos. Com esse cenário, com 16 estudantes com crenças e concepções negativas sobre seu desempenho na matemática básica, foi essencial nosso papel de mostrar a eles outros olhares e questionamentos e também refletir, conjuntamente, acerca de algumas das suas características pessoais positivas ou negativas. Dessa forma, procuramos, na interação em sala de aula, um relacionamento mais pessoal e tivemos que aprender a lidar com a diversidade e limitações. Essa nossa atitude nos exigiu um suporte cognitivo e afetivo, e a busca por outras estratégias de ensino para que eles pudessem progredir em seus percursos de aprendizagem.

5.1.2 Compromisso acadêmico da turma

Uma de nossas preocupações com relação à turma da pesquisa definitiva era a quantidade dos que desistiam da disciplina de Cálculo I, sempre nas primeiras semanas do curso. A partir da experiência que tivemos com a turma do projeto-piloto, das informações que conseguimos levantar junto ao registro acadêmico e das conversas informais, vimos que são vários os motivos que os levam a desistir tão cedo. Dentre esses motivos, vamos, neste momento, destacar dois. O primeiro é o número elevado de disciplinas escolhidas para cursar em cada semestre. Eles se matriculam em muitas disciplinas, e não conseguem administrar seu tempo de estudo, logo, abandonam as que eles consideram que são mais difíceis de conseguirem aprovação. E, a partir dos relatos e da nossa experiência com turmas anteriores, a disciplina de Cálculo I seria uma dessas. O segundo são os hábitos de estudos. Eles relatam, constantemente, que não possuem o hábito de estudar regularmente e o que acontece na prática é que estudam horas antes das avaliações, isto é, quando estudam. Esse tipo de comportamento, Tobias (1985[35], apud MENDUNI, 2003, p. 95) chamou de modelo do *Déficit*, *ou seja, hábitos de estudos incorretos ou estratégias inadequadas para resolução de provas, que podem ser fatores que explicam o baixo desempenho dos alunos.*

Tabela 3 – Quantidade de disciplinas que os alunos cursavam em 2014/1

Número de disciplinas em que os estudantes estavam matriculados no semestre 2014/1	Estudantes	Razão em relação ao total de estudantes
4 disciplinas	A4, A13, A15 e A24	4/29 = 13,79%
5 disciplinas	A2, A5, A6, A14, A16, A17, A23, A25, A26 e A28	10/29 = 34,48%

[35] TOBIAS, S. Test anxiety: interference, defective skills, and cognitive capacity. **Educational Psychologist**, ogist 20, 1985, p. 135-142.

6 disciplinas	A1, A3, A8, A18, A19, A20, A27e A29	8/29 =27,58%
7 disciplinas	A7, A9, A10, A11, A12, A21, A22	7/29 = 24,13%

Observação: O estudante A30 não respondeu a esse questionamento.

Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Conforme podemos observar na Tabela 3, 25 dos 29 alunos (86,20%) estão matriculados em cinco ou mais disciplinas. A maior parte tem uma carga horária mínima de 60 horas, mas existem, ainda, disciplinas com 45 e 90 horas, exigindo uma carga horária intensa de estudos. Outro problema que encontramos, é o fato de a disciplina de Cálculo I ser ofertada em horário contraturno, e tivemos que nos adaptar. Os estudantes que se matricularam em muitas disciplinas estavam encontrando dificuldades, em alguns momentos, em participarem de maneira assídua, pelo fato de terem muitas provas e atividades das disciplinas que não eram de dependência. A partir das experiências com as turmas anteriores de dependência, orientamos os estudantes, no início do semestre, a se matricularem em uma quantidade de disciplinas que eles pudessem dar conta. Mesmo orientando, podemos constatar que alguns deles ainda insistiram em ficar com uma sobrecarga.

Verificando os relatórios individuais desses estudantes, constatamos que 80% dos que ficaram reprovados em Cálculo I, no semestre anterior, também ficaram reprovados em Física I. Esta foi apontada pelos estudantes como sendo a que mais reprova no curso. Esse fato é sempre relatado durante nossas aulas e nas conversas informais. Então, achamos conveniente verificar quais seriam os estudantes que estavam cursando, nesse semestre, as duas disciplinas e constatamos que 10 estudantes (A1, A3, A4, A7, A10, A11, A12, A14, A17e A26) estavam nessa situação. A partir dos históricos de reprovação nessas duas disciplinas, sentimos que seria necessário orientar melhor no que diz respeito aos seus estudos e ao comprometimento com a disciplina de Cálculo I.

As pesquisas relacionadas ao fracasso em Cálculo, que focalizam na forma como os alunos estudam (FROTA, 2001), e a nossa experiência, no IFES-Campus Itapina, com turmas desde 2010, foram importantes, para nós, nessa fase de (re)conhecimento desses estudantes , pois possibilitaram trazermos as informações sobre o hábito de estudos. Tínhamos, como objetivo, fazer esses estudantes refletirem sobre o comprometimento que eles deveriam ter com relação à disciplina de Cálculo I. Inicialmente, verificamos qual seria o tempo de estudo que os estudantes julgavam necessário dedicar para ter um bom desempenho nessa disciplina (Quadro 3).

Quadro 3 – Tempo de estudo extraclasse que os estudantes acreditavam ser o ideal

Para você, quanto tempo de estudo extraclasse seria necessário para conseguir um bom desempenho em Cálculo I? As respostas dos estudantes foram em quantidade de horas de estudos diárias.		
Estudantes que acreditavam que 1 hora seria suficiente, ou menos de 1 hora.	A1, A7, A11, A13, A20, A21, A22, A28 e A29	9/29 31,03%
Estudantes que acreditavam que 2 horas seriam suficientes.	A3, A4, A8, A9, A12, A15, A24 e A25	8/29 27,58%
Estudantes que acreditavam que 3 horas seriam suficientes.	A16, A18, A23 e A26	4/29 13,79%
Estudantes que acreditavam que 4 horas seriam suficientes.	A10, A14 e A19	3/29 10,34%
Estudantes que acreditavam que muitas horas e não especificaram nenhum valor.	A2, A5, A6, A17 e A27	5/29 17,24%

Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Quadro 4 – Tempo de estudo extraclasse que os estudantes realizavam efetivamente

Quantas horas de estudo você faz por dia, além do horário que você permanece na faculdade? As respostas dos estudantes foram em quantidades de horas por dia.		
Não estuda nenhum horário.	A22	1/29 3,44%
Estudantes que estudam menos de 1 hora.	A8, A9, A11, A20, A21 e A29	6/29 20,68%
Estudantes que estudam exatamente 1 hora.	A1, A3, A4, A15, A16, A18, A24 e A25	8/29 27,58%
Estudantes que estudam exatamente 2 horas.	A2, A5, A6, A17 e A23	5/29 17,24%
Estudantes que estudam exatamente 3 horas.	A10, A14, A19, A26 e A27	5/29 17,24%
Estudantes que estudam exatamente 5 horas.	A28	1/29 3,44%
Estudantes que estudam somente quando têm alguma prova.	A7, A12 e A13	3/29 10,34%

Observação: O estudante A30 não respondeu a esse questionamento.

Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Observação: O estudante A28, que respondeu que faz cinco horas diárias de estudos, disse que, nesse tempo, estão incluídos outros componentes curriculares. Para a disciplina de Cálculo I, seria menos de uma hora diária. Os demais estudantes responderam que esses horários são exclusivamente para a disciplina de Cálculo I.

A partir das informações do Quadro 3, podemos verificar que aproximadamente 60% dos estudantes acreditam que o tempo de 1 ou 2 horas diárias de estudos seriam suficientes. Com o intuito de orientarmos melhor, pois, em nossas conversas informais, percebíamos que eles não estudavam com regularidade, não só para a disciplina de Cálculo I, mas também para os outros componentes curriculares, fizemos uma pergunta de quanto tempo de estudo eles realmente faziam. A partir das respostas desses estudantes, constatamos que existiam contradições no que se pensava e no que realmente se praticava com relação ao comprometimento com os estudos. Nenhum estudante disse que estudava um tempo maior do que ele acreditava que seria suficiente para obter sucesso na disciplina de Cálculo I. Seguem algumas respostas que melhor representam aquilo em que a turma, de maneira geral, acreditava, e encontramos algumas respostas contraditórias que nos levaram a pensar e a questionar, depois, cada estudante:

Estudante A2:

> Tempo que acredita ser necessário: Resposta: *Muito!!*
> Tempo que estuda: Resposta: *Mais ou menos duas horas.*

Estudante A4:

> Tempo que acredita ser necessário: Resposta: *2 horas.*
> Tempo que estuda: Resposta: *1 hora por dia, variando as matérias.*

Estudante A5:

> Tempo que acredita ser necessário: Resposta: *Máximo que puder.*
> Tempo que estuda: Resposta: *2 horas, dependendo da matéria.*

Estudante A7:

> Tempo que acredita ser necessário: Resposta: *Eu acho que, sempre depois da aula, uma hora de estudos ajudaria muito.*
> Tempo que estuda: Resposta: *Sinceramente, nenhum, a não ser quando tem prova.*

Estudante A13:

> Tempo que acredita ser necessário: Resposta: *Umas 3 horas semanais*.
> Tempo que estuda: Resposta: *Não estudo todos os dias. Habituei-me estudar somente antes das provas, sou muito relaxado para estudar.*

Estudante A8:

> Tempo que acredita ser necessário: Resposta: *Uma ou duas horas, dependendo do assunto estudado.*
> Tempo que estuda: Resposta: *Estudo de 30 a 40 minutos, às vezes*.

Estudante A18:

> Tempo que acredita ser necessário: Resposta: *3 horas por dia*.
> Tempo que estuda: Resposta: *Às vezes, 1 hora por dia. Às vezes, nenhuma*.

Acreditamos que essa postura, em relação aos estudos são marcas trazidas do ensino básico (ensinos fundamental e médio). Mesmo tendo consciência de que eles já faziam parte do ensino superior por, pelo menos, um ano, o que observamos, na prática, é que essa transição, do ensino básico para o superior, ainda precisava ser trabalhada. Em seu portal, a Universidade de Coimbra[36] nos traz dicas e algumas informações, de forma clara, dessa complexidade da transição do ensino secundário para o ensino superior e foi importante enfatizarmos alguns desses fatores dentro do contexto dessa turma.

Algumas diferenças básicas desses dois ciclos da vida acadêmica desses estudantes precisaram ser refletidas com a turma, trazendo para os discentes a consciência de que se fazia e se faz necessário estudar regularmente. Dentre essas dicas destacamos: i) No ensino fundamental, *pouca matéria para estudar* e assuntos

---

[36] Disponível em: http://www.uc.pt/fctuc/ceip/metodos_estudo/transicao

sedimentados; já no ensino superior, *a matéria "cresce" exponencialmente*, e nós podemos ainda acrescentar que alguns conteúdos estudados são interligados dentro da própria matemática ou, mesmo, com outras disciplinas. Por exemplo, na Física I, quando o estudante precisa estudar os movimentos dos corpos, utilizará, de maneira aplicada, o conceito de derivada; ii) No ensino básico *as turmas são menores e fixas*; já no superior, *são grandes e divididas em aulas teóricas, práticas, teórico-práticas*. Nesse caso, alguns estudantes são distribuídos de acordo com as disciplinas escolhidas e, por algum momento, eles perdem o contato, dificultando o entrosamento; iii) No ensino básico, *existe um contato mais próximo do professor* e, no superior, *a relação fica mais distante* (grifo nosso). Esse foi um dos pontos em que procuramos melhorar, fazendo com que conseguíssemos ganhar a confiança deles, mesmo sabendo que muitos deles tinham sido nossos alunos (professor-pesquisador) e ficaram reprovados quando ministramos a disciplina de Cálculo I, até o primeiro semestre de 2013.

Segundo o portal da Universidade de Coimbra (2015), as diferenças acima indicadas concretizam a capacidade de inserção, de organização e, principalmente, de estudo desses universitários. Eles passam a gozar de maior autonomia e liberdade, em contrapartida, a ter maior responsabilidade pelo sucesso ou fracasso da sua vida estudantil.

Levando em consideração essas informações, podemos constatar que alguns precisavam assumir um maior comprometimento com sua formação. Cientes disso, tomamos algumas medidas na busca de melhoria da qualidade do tempo de estudo necessário. Foi preciso incutir, neles a responsabilidade com o horário de estudo, visto que boa parte, em situação de fracasso, não se mobilizava e continuava se comportando de maneira semelhante aos semestres anteriores. Com isso, criamos um horário de estudo fixo, de duas horas por semana, de apoio à aprendizagem de conteúdos do ensino básico e de tópicos específicos de Cálculo.

5.1.3 Crenças sobre a aprendizagem de Cálculo

> As crenças sobre a aprendizagem da matemática são um fator importante em termos de motivação. Os estudantes chegam à sala de aula com uma série de expectativas sobre como deve ser a forma que o professor deve ensinar-lhes matemática. Quando a situação de aprendizagem não

> corresponde a essas crenças, produz-se uma grande insatisfação, que interfere na motivação do aluno (GÓMEZ CHACÓN, 2003, p. 67).

As ações que desenvolvemos para ouvir e conhecer esses estudantes, com o objetivo de motivá-los, e de certa forma induzi-los a acreditarem que seria possível superar os obstáculos e limitações na sua aprendizagem, provocaram uma ruptura das nossas práticas pedagógicas. Estamos falando de uma prática em que o professor se mantinha distante do aluno, que priorizava exclusivamente os aspectos cognitivos e desconsiderava, em sua totalidade, alguns fatores emocionais tão presentes nas relações humanas dentro da sala de aula. Acreditamos que esse movimento dinâmico com outro olhar para a prática docente, que mobiliza aspectos afetivos e cognitivos durante os processos de ensino e aprendizagem, é condição fundamental para que possa acontecer aprendizagem. Assim, concordamos com Esteban (2013):

> [...] Nem sempre é fácil questionar e substituir nossas crenças, preconceitos, valores, conhecimentos e costumes. Falamos de um território em construção. Seus limites são pouco nítidos, são poucas as certezas e muitos os desafios, tendo como pano de fundo a imagem de um mundo cambiante, complexo, dinâmico, instável, inacabado. Há um contorno tênue que delimita posições e perspectivas, pois o diálogo entre a teoria e a prática, ou entre a prática e teoria, vai definindo o movimento necessário/possível de desenvolvimento da pesquisa, conectado à ação transformadora (ESTEBAN, 2013, p. 11).

Considerando esse mundo complexo e dinâmico da sala de aula, em que, a todo o momento, precisamos buscar na teoria um referencial para compreender nossa prática, é que construímos o questionário 2 (Apêndice A). As análises das informações obtidas nas respostas desse segundo questionário permitiram-nos compreender e descrever as principais crenças sobre a aprendizagem de Cálculo. A partir das perguntas 5 a 12, conseguimos informações sobre as principais crenças que eles tinham e têm sobre a disciplina de Cálculo I, antes de a cursarem, e algumas que estabeleceram e/ou modificaram e/ou questionaram depois de passarem a frequentar as aulas. Também identificamos como analisaram o seu desempenho, especificamente na disciplina de Cálculo I e a forma como os professores anteriores trabalharam esse componente curricular. Procuramos observar se existiam padrões (ou modelos semelhantes) de respostas, e assim formamos e estabelecemos categorias a partir dos dados.

Analisando globalmente as informações, conseguimos verificar quatro categorias de respostas, em relação às crenças iniciais[37], sobre a disciplina de Cálculo I desses estudantes, e as que eles evidenciavam ter depois que frequentaram a disciplina.

Categoria 1- Formada por estudantes que tinham ouvido falar que a disciplina de Cálculo I era difícil e que, devido a esse fato, apresentava alto índice de reprovação. Esses mesmos, depois que frequentaram a disciplina, continuaram confirmando essa concepção. Estão incluídos nessa categoria os estudantes: A4, A6, A7, A10, A12, A14, A19 e A29. Como algumas respostas traduzem o mesmo significado, transcrevemos, a seguir, apenas aquelas que se diferiam por algum tipo de comentário que não aparecia nas respostas dos colegas.

Estudante A4:

> *Todos falavam que era muito difícil e a que mais reprovava. Já comecei desanimado, e a matéria não entrava na cabeça, o que me fez abandonar*.

Estudante A14:

> *Que era a disciplina mais difícil depois da Física e que muita gente ficava reprovado. Então, entrei com medo e isso fez com que fosse desistindo ao longo do semestre. Vejo agora que é difícil mesmo.*

---

[37] Estamos considerando as crenças iniciais dentro dos aspectos metacognitivos, propostos por (SCHOENFELD (1987, 1992), Garofalo e Lester (1985 apud GÓMEZ CHÁCON, 2003, p. 61)), em que *as crenças e intuições constituem o ponto de vista matemático sobre si mesmo, sobre o contexto, sobre o tema e sobre a matemática que determina a conduta de um indivíduo*. Nesse caso, vamos considerar as crenças a que não chegamos, após um trabalho de entendimento, mas que já estão em nossa consciência quando nos pomos a refletir sobre algo, ou porque fomos influenciados a partir do relato da experiência do outro. O estudante A30 não respondeu aos dois primeiros questionários por isso não entrou em nenhuma das categorias citadas.

GAROFALO, J.; LESTER, F. Metacognition cognitive monitoring, and mathematical performance. **Journal for Research in Mathematics Education**, p.16, p.163-176, 1985. SCHOENFELD, A. H. **Cognitive science and mathematics education.** Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987. SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-marking in mathematics, In D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of reseach on mathematics teaching and learning**. New York: MacMillan P.C., p. 334-370, 1992.

Estudante A19:

> *Que era uma matéria muito difícil e que poucos alunos são aprovados. Penso que estavam certos.*

Pudemos verificar que estavam conscientes nas explicações sobre a dificuldade da disciplina que foi transmitida para eles por colegas que estudaram antes Cálculo I. Mas o que mais nos chamou atenção foram as respostas dos estudantes A4 e A14. O estudante A4 relatou que essa crença sobre a dificuldade da disciplina e do número de reprovações transmitidas pelos colegas, já foi para ele um motivo para desanimar logo no início do curso. E a resposta do estudante A14 corroborou as do estudante A4 sobre como isso pode atrapalhar o desempenho. Constatamos, então, que algumas crenças sobre o fracasso escolar, por parte de alguns estudantes, e a falta de reflexão sobre os motivos desse fracasso podem, de certa forma, influenciar os demais a terem a mesma concepção.

A partir das ideias de Gómez Chacón (2003), e com esses dados em mãos, procuramos indagar se as barreiras de aprendizagem poderiam estar na falta de desenvolvimento de atitudes de valorização e de gosto pela disciplina, ou se estariam na forma como eles vivenciavam a universidade. Dessa forma, seria necessário perguntar de onde vêm essas crenças, na tentativa de buscar quais relações ou significados apareceram nessas respostas, e ou mesmo, se na experiência que manifestavam de seu próprio convívio acadêmico. Foi possível perceber que elas eram tão fortes em seus discursos, que quaisquer dificuldades encontradas, fossem elas de conteúdos da matemática básica ou mesmo de alguns conceitos mais abstratos do próprio Cálculo, trouxeram à tona essa ideia de que não conseguiriam superar essas limitações.

Categoria 2 - Formada por estudantes que tinham ouvido falar que a disciplina de Cálculo I era difícil e reprovava muito. Mas que, após frequentarem a disciplina, perceberam que, com dedicação e estudo, poderiam superar essas dificuldades. Estão incluídos nessa categoria os estudantes: A2, A3, A5, A11, A13, A15, A16, A17, A20, A21, A22, A23, A24, A25 e A26. Seguem alguns depoimentos que representam, de maneira geral, alguns depoimentos desse grupo. Os que não transcrevemos, é porque trazem as mesmas reflexões.

Estudante A3:

> *Que era muito difícil. Os conteúdos são complicados, mas, com empenho, vejo que dá para conseguir aprender*.

Estudante A5:

> *Ouvia falar muito mal, portanto, quando comecei a cursar, já entrei sabendo que não conseguiria passar. Hoje vejo que se, eu me esforçar, consigo passar.*

Estudante A13:

> *Ouvia que a matéria era complicada, difícil demais. Não acho o curso difícil, sou eu que não me empenho e não estudo para aprender.*

Estudante A17:

> *Que era a disciplina mais difícil, juntamente com Física, de se passar. Realmente é preciso se dedicar muito para passar e saber administrar o tempo de estudo para não acumular as matérias*.

Estudante A22:

> *Ouvia dizer que era complicado. Mas percebi que é só falta de estudo e às vezes, a didática do professor.*

Esse segundo grupo de estudantes reforçou a ideia da dificuldade da disciplina transmitida pelos colegas que já a haviam cursado anteriormente, mas reconheceram que, com empenho e dedicação aos estudos, eles poderiam superar suas limitações. O importante é que, de certa forma, demonstraram estar fazendo uma reflexão positiva sobre como superar alguns obstáculos que podem aparecer ao longo do curso. Gostaríamos de destacar o depoimento do estudante A22, sendo o único que pontuou que a didática do professor também poderia ajudá-lo a superar suas dificuldades. Quando questionado o que isso representava para ele, ele nos respondeu que seria a maneira como o professor explicava a matéria, atendia aos questionamentos dos alunos e a forma como ele avaliava a turma.

Categoria 3 – Formada por estudantes que não ouviram nada negativo sobre a disciplina de Cálculo I, mas que, para eles, seria uma disciplina a que precisariam se dedicar muito. Esses estudantes mantiveram essa crença depois que frequentaram a disciplina. Nessa categoria, nós identificamos os estudantes A8, A27 e A28. Seguem as respostas desses três estudantes.

Estudante A8:

> *Precisa de dedicação e muito estudo. Vejo que preciso de mais dedicação*.

Estudante A27:

> *Uma disciplina que necessita de estudos diários fora da sala de aula. Constatei que realmente precisa de uma dedicação extra.*

Estudante A28:

> *Ouvia falar que é uma matéria que é preciso estudar muito. Após frequentar o curso, eu concordo com o que ouvi*.

Nessas três respostas, apareceu explicitamente o posicionamento desses estudantes a respeito do que eles precisavam realizar para obterem sucesso. Consideramos como positivo, pois, como alunos repetentes, já traziam consigo as marcas positivas e negativas de tentar aprender essa disciplina. De certa forma, eles conseguiram fazer reflexões sobre a conduta e a postura que precisavam assumir diante da aprendizagem de Cálculo. Acreditamos que esse tipo de posicionamento e postura possa ter favorecido o sucesso deles na disciplina.

Categoria 4 – Formada por estudantes que não expressaram crenças negativas sobre a disciplina de Cálculo, mas reconheceram que seu fracasso se devia ao fato de não terem uma base do ensino médio, ou porque acreditavam que poderiam se comportar, na disciplina de Cálculo I, da mesma forma como fizeram de matemática no ensino médio. Nesse grupo, encontramos os estudantes A9 e A18.

Estudante A9:

> *Que o professor explicava bem, mas, na prova, ele colocava questões muito difíceis. Percebi que não tinha conhecimento da matemática do ensino médio para compreender alguns conceitos.*

Estudante A18:

> *Imaginava que seria uma boa matéria, pois gostava de matemática. Mas como eu não estudava, só ouvia o que [o] professor de matemática do ensino médio ensinava e fazia a prova. No Cálculo me dei mal, pois requer estudo e muita coisa da matemática do ensino médio que já esqueci.*

As concepções acerca do próprio fracasso ficaram relacionadas nos depoimentos à deficiência de conteúdos da matemática básica. Isso nos informa da necessidade de analisarmos a transição do ensino médio para o superior, como já nos apontam algumas pesquisas realizadas. Concordamos com Nasser, Sousa, e Torraca (2012, p. 6), quando assinalam que *o baixo desempenho de alunos calouros em Cálculo é atribuído, em geral, a lacunas na aprendizagem de Matemática na Escola Básica e que a prontidão para a aprendizagem de Cálculo depende de vários conteúdos trabalhados na Escola Básica.* O que podemos acrescentar, nesse olhar para a matemática básica, é que os estudantes universitários que repetem a disciplina de Cálculo, por duas ou mais vezes, apontam, de maneira clara, que esses conteúdos da matemática básica funcionam como fatores que influenciaram no seu fracasso em Cálculo.

Tivemos ainda, A1, que respondeu não ter ouvido dizer nada sobre a disciplina de Cálculo I antes de iniciar o curso e que, naquele momento, ele observava que era necessário estudar Cálculo. Como suas respostas para esses dois itens da pergunta 5 foram vagas, achamos conveniente não categorizá-las.

5.1.4 Motivos do insucesso em Cálculo

> As pequenas pistas, os *pormenores mais negligenciáveis*, os indícios secundários, as observações irrelevantes, os dados marginais, os silêncios, são aspectos de grande importância para a compreensão da realidade subjacentes às atuações visíveis (ESTEBAN, 2013, p. 33).

A procura pela compreensão das causas do insucesso, assim como dos motivos do abandono, foi uma das molas propulsoras deste estudo. E trazer essa reflexão para eles foi uma forma de demonstrar que nós, professores, preocupamo-nos com o sucesso e fracasso deles na disciplina. A maneira como conduzimos a aplicação desses instrumentos de pesquisa e das conversas informais que tivemos, na tentativa de conhecer e analisar algumas das causas de insucesso foi crucial para todos os envolvidos. Foi a oportunidade de mostrar para esses estudantes que a visão deles de que nós estávamos sempre querendo “ferrar com eles”[38] não era e nem é uma verdade absoluta.

Com essa perspectiva, ao olharmos para as perguntas 7, 8, 11 e 12 do questionário 2 (Apêndice 1), percebemos que esses eram questionamentos centrais para analisarmos. Observamos que estavam diretamente relacionados com a visão do aluno sobre seu desempenho (sucesso ou fracasso) na disciplina de Cálculo I e com a visão deles acerca do papel do professor na aprendizagem. A partir das leituras e análises das respostas, foi possível constatar alguns indícios do olhar deles sobre essa complexa rede de relações que envolvem o processo educativo. Para facilitar a leitura, introduzimos a seguir os questionamentos 7, 8, 11 e 12 do questionário aplicado.

7) Na sua análise, quais foram os motivos ou dificuldades que levaram você a repetir a disciplina de Cálculo I?

8) Que tipo de ajuda seria boa para superar essas dificuldades?

11) A metodologia utilizada e as explicações do professor estão suficientes para você entender os conteúdos que estão sendo expostos?

12) Quais são suas expectativas em relação ao seu desempenho nesse semestre?

A complexidade do objeto (a reprovação na disciplina de Cálculo I) que estudamos, exigiu um olhar sobre muitas direções e foi bastante difícil, para nós, fazê-lo com clareza e consistência. Em alguns momentos, isso se confrontava com nossa prática, já enraizada em nossa postura de um professor universitário como *transmissor de conhecimentos e professor como fonte de respostas* (GÓMEZ CHACÓN, 2003, p.71) que mantivemos durante anos e que, também, fazia parte do imaginário de muitos alunos como o professor ideal. Portanto, alcançar o propósito de compreender os principais motivos que os levaram a repetir essa disciplina não

[38] Essa é uma expressão normalmente usada pelos estudantes, para caracterizar o comportamento de um professor que eles acreditam que só pensa em reprová-los.

foi nem é uma tarefa fácil, e estamos conscientes de que alguns erros foram inevitáveis. Os objetivos propostos acima levaram à análise temática das respostas dos questionamentos citados em três categorias: dificuldades de aprendizagem, metodologia de ensino e expectativa do estudante em relação ao desempenho acadêmico.

5.1.4.1 DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM EM CÁLCULO

Os estudantes, nessa categoria de dificuldade de aprendizagem em Cálculo, apontaram, como principal causa do seu fracasso na disciplina, os seguintes fatores:

i) a forma como o professor explicava os conteúdos e a metodologia adotada por ele. Neste subitem estão incluídos 13 estudantes, como seguem alguns relatos:

- *Trocas de professores, muito conteúdo sendo passado rapidamente, e o professor não prestava assistência* (Estudante A14).
- *O professor não conseguia passar o conhecimento dele como devia. Parecia que ele só sabia para ele* (Estudante A20).
- *Não entender como os resultados são obtidos por fazerem a conta de cabeça em certa parte da matéria, onde não sei o cálculo, e o professor não revisa* (Estudante A19).
- *Falta de entendimento de minha parte e a dificuldade de o professor expressar o conteúdo* (Estudante A12).

Podemos perceber, nos relatos, que o papel do professor, a partir da perspectiva desses estudantes, seria aquele que Gómez Chacón (2003) considera que segue didática tradicional, ou seja, ele é o transmissor de conhecimento matemático, o especialista em conteúdos. O aluno esforça-se para aprender tudo que o professor lhe transmite. Nesse contexto, a disciplina está orientada, basicamente, para uma aquisição de conceitos, dando-lhe uma finalidade exclusivamente informativa. Parece-nos que quando o docente não consegue dar conta de satisfazer a essas condições, a relação professor-aluno pode ficar estremecida, e o estudante acredita que o papel do professor na sua aprendizagem deixou a desejar.

ii) a falta de compromisso deles com a disciplina em se tratando de tempo para estudo e dedicação. Nesse grupo, temos sete estudantes. E, como as respostas foram bem parecidas, seguem algumas como exemplos:

- *Falta de estudos, falta de dedicação e um pouco de dificuldade com cálculos* (Estudante A13).
- *Amigos chamando para sair, a falta de compromisso e outras coisas* (Estudante A15).
- *As poucas horas de estudos extraclasse e a falta de estudar diariamente a matéria* (Estudante A24).

A partir das nossas experiências com turmas de Cálculo I, sempre encontramos um grupo de estudantes universitários que nunca tiveram hábitos de estudos. Quando conversamos com eles, a justificativa mais comum era que, no ensino fundamental e no médio, eles conseguiam ser aprovados com o pouco que aprendiam no momento das aulas e que, de certa forma, nunca precisavam estudar de maneira regular. Dentro desse contexto, no ensino médio, sentiam-se desmotivados a estudar. Parece-nos que ingressaram no ensino superior e seguiram com a mesma postura e pensamentos.

iii) as dificuldades referentes aos conteúdos ministrados e os baixos resultados nas avaliações. Dentro desse contexto, tivemos oito estudantes. Seguem alguns relatos:

- *Desistência da matéria por não conseguir a média nem na primeira prova* (Estudante A17).
- *Não conseguia me concentrar, não conseguia estudar sozinha e falta de atenção nas provas* (Estudante A10).
- *Por não conseguir desenvolver os exercícios sozinho, então desanimava e abandonava* (Estudante A4).
- *Dificuldade na última etapa da matéria de derivada* (Estudante A2).
- *Com certeza, o que me desanima é o começo, quando me dou mal na primeira avaliação* (Estudante A28).

A partir das respostas desses estudantes foi possível constatar como é importante o professor ter a consciência que no início do curso de Cálculo os alunos estão muito inseguros e não conhecem a maneira como o professor avalia os conteúdos em provas e testes. Portanto, se faz necessário oferecer aos estudantes um acompanhamento ou até mesmo um atendimento individualizado para que ele supere essas dificuldades iniciais com a disciplina de Cálculo.

iv) a carência da matemática básica (ensinos fundamental e médio) que contribui para o desinteresse do estudante por não conseguir acompanhar a disciplina.

- *A falta de estrutura (base) do ensino fundamental* (Estudante A3).
- *Não entender como os resultados são obtidos por fazerem a conta de cabeça em certa parte da matéria onde não sei o cálculo* (Estudante A19).

As declarações conscientes desses estudantes sobre essa falta de base dos conteúdos do ensino básico são fundamentais para o desenvolvimento do Cálculo. Diversas pesquisas apontam para essa problemática. Vale destacar também que os professores universitários precisam e devem ter consciência disso e pensar em como abordar conteúdos de Cálculo sabendo que existe uma falta de base matemática. Trazemos, aqui, os trabalhos de Nasser, Sousa, Torraca, Assemany e Azevedo (2013), que apontam que, em geral, as principais causas das dificuldades em certos conteúdos de Cálculo recaem em lacunas na aprendizagem de conteúdos trabalhados na Matemática da Escola Básica, Ensino Fundamental (séries finais) e Ensino Médio. Dentre os conteúdos matemáticos da escola básica (ensino fundamental e médio) que os estudantes que participaram da pesquisa e que também foram observados nas pesquisas Nasser, Sousa, Torraca, Assemany e Azevedo (2013) que eles demonstraram ter dificuldades destacamos: a) fatorações algébricas; b) produtos notáveis; c) traçados de gráficos de funções reais; d) reconhecimento de domínio e imagem de uma função.

Para Palis (2010), o professor que trabalha na área de Matemática com alunos recém-ingressos no ensino superior não tem, em geral, uma percepção clara das aprendizagens anteriores dos alunos e tende a supervalorizá-las ou a subvalorizá-las. Com esse olhar, o professor universitário precisa reconstruir uma série de conceitos fundamentais para o ensino de Cálculo, cuja construção iniciou-se no ensino básico.

5.1.4.2 OLHAR DOS ESTUDANTES SOBRE A METODOLOGIA DE ENSINO

Foram fundamentais, para a nossa tomada de decisão e de consciência sobre nosso papel de professor, as considerações que esses estudantes trouxeram sobre os obstáculos e dificuldades de aprendizagem e o olhar deles sobre a metodologia que foi utilizada pelos seus professores anteriores de Cálculo I. À medida que construirmos, em nossa prática, a consciência de que precisamos buscar, nas pequenas informações que os estudantes trazem, pistas importantes sobre o processo de aprendizagem deles e acerca de nossos procedimentos de ensino e avaliação, ou seja, quando buscarmos pistas de como eles conseguem aprender, de como ensinamos, e de identificar o que realmente eles precisam para conseguir sucesso na aprendizagem deles, é que conseguiremos ajudá-los com seus obstáculos e dificuldades de aprendizagem de Cálculo e talvez questionar, refletir e alterar nossas práticas docentes. Com esse olhar, constatamos que, segundo esses estudantes, o que eles precisavam para conseguir sucesso seria:

i) a criação de um momento extra de estudo com a participação do professor, de monitores e colegas, para que eles criassem o hábito diário fora do período normal das aulas. Elaboração de mais listas de exercícios e que o professor tivesse mais paciência para tirar as dúvidas que pudessem surgir na resolução. E, dentro dessa perspectiva, temos a opinião de 22 estudantes de um total de 29, ou seja, mais de 75% responderam a essa pergunta. Esse fato pode ser constatado nas respostas de alguns estudantes que transcrevemos abaixo.

- *Formar grupos de 2 ou 3 alunos, sempre depois de todas as aulas de Cálculo, para se reunirem com o professor e estudar* (Estudante A7).
- *Professor com disponibilidade de horário e monitoria* (Estudante A26).
- *Listas de exercícios e correção das dúvidas em sala de aula* (Estudante A21).
- *Grupos de estudos, aulas extras e monitoria* (Estudante A24).
- *Aulas realizando apenas exercícios, e alguém com paciência para explicar* (Estudante A4).

- *Professor ser paciente, querer ajudar o aluno. Isso produz força de vontade no aluno* (Estudante A20).

ii) uma mudança de postura do professor para buscar outras formas de ensinar o conteúdo e procurar maneiras de motivar os alunos. Eles nos trouxeram informações de que, existem relações diretas entre a metodologia de ensino do professor e a sua aprendizagem. Com essa visão, temos 3 estudantes.

- *O professor deve procurar mais formas de ensinar, mas com um modo de incentivar o aluno a se interessar pela matéria*. (Estudante A8)
- *Incentivo do professor para a importância do estudo extraclasse. E um método mais compreensivo de estudo*. (Estudante A18)
- *Uma explicação sem tantas complicações e maior interesse do aluno*. (Estudante A25)

iii) uma mudança na postura como aluno, com relação aos estudos. Com essa opinião, encontramos 3 estudantes.

- Tenho que procurar a melhor forma de estudar para facilitar meu aprendizado e mais dedicação da minha parte (Estudante A13).
- *Isso é um fator de cada um, primeiramente tive que me auto ajudar* (Estudante A28).
- Estudar mais e manter a calma, acredito (Estudante A23).

iv) criar momentos para revisar conteúdos das séries anteriores (ensino médio) os quais são relevantes para a aprendizagem de Cálculo.

- *Relembrar um pouco das matérias passadas (ensino médio, principalmente), mostrar o que deve ser estudado para poder compreender as questões de Cálculo* (Estudante A19).

Iniciando uma discussão, a partir do ponto de vista dos estudantes sobre a metodologia utilizada, ou, poderíamos dizer, sobre as práticas pedagógicas do professor, fizemos o seguinte questionamento: **A metodologia utilizada e as explicações do professor de Cálculo I estão sendo suficientes para você entender os conteúdos que estão sendo expostos?**

Tínhamos conhecimento de que alguns já haviam frequentado a disciplina por duas ou mais vezes. Nosso objetivo, inicialmente, foi verificar se já conseguiriam perceber algumas pequenas mudanças no nosso comportamento (tanto de professor e professor-pesquisador) diante da turma. Dentre elas, podemos exemplificar a nossa preocupação em querer conhecer melhor esses estudantes em diversos aspectos, como: hábitos de estudos, suas principais dúvidas, que conteúdos de Cálculo eles conseguiram aprender e em quais eles tiveram mais dificuldade. Enfim, seriam questionamentos que, talvez, nenhum dos seus professores anteriores tivesse feito.

Nossa grande dificuldade com esse questionamento é que ele foi feito no dia 24/02/2014, praticamente na terceira semana efetiva do curso. Com isso, algumas informações e questionamentos, que alguns desses estudantes trouxeram, foram contraditórios. Quando analisamos as respostas, nós percebemos que alguns deles referiam-se a seus professores dos semestres anteriores, e outros se reportavam ao professor atual, que era o que pretendíamos analisar. Tivemos alguns que não quiseram responder pelo fato de terem assistido só à algumas aulas e, segundo eles, não seria possível fazer ainda nenhum tipo de análise a esse respeito. Levando em consideração essas contradições, conseguimos perceber questionamentos interessantes sobre a nossa prática e dos colegas professores anteriores.

Algumas respostas de estudantes, referindo-se ao trabalho desenvolvido pelos seus professores anteriores:

- *Não. Porque o professor era muito rude* (Estudante A15).
- *Não muito. Depende de mim também, mas dá para conseguir, eu acho* (Estudante A20).

Trazemos, agora, as respostas da turma com relação ao trabalho que estava sendo realizado em 2014/1. Vamos dividir as respostas em dois grupos: o primeiro, será daqueles estudantes que assinalaram, de maneira positiva, que o trabalho estava atendendo às suas expectativas; o segundo, dos que disseram que não estava atendendo. Nesse primeiro grupo, encontram-se 17 estudantes. A satisfação desses estudantes, com relação ao trabalho que estava sendo realizado, pode ser confirmada nas respostas de alguns alunos.

- *As metodologias de agora, sim. Já aprendi muito mais que no semestre passado todo* (Estudante A19).
- *Sim, pois esse professor tira dúvidas e sabe explicar* (Estudante A16).
- *Sim, depois de algumas tentativas, me sinto mais preparado* (Estudante A21).
- *Métodos bastante diferenciados que estão possibilitando uma assimilação maior dos conteúdos abordados* (Estudante A27).
- *Sim, bastante paciência em ensinar e demonstra ter conhecimento e domínio do assunto* (Estudante A26).
- *Sim, porque procura saber a dificuldade do aluno* (Estudante A8).
- *Sim. As explicações estão sendo feitas sem grandes complicações, da maneira mais clara possível. Explica-se o que realmente é necessário saber e ponto final* (Estudante A25).

No segundo, estão os estudantes que não estavam acreditando que a metodologia utilizada estava ajudando. Nesse grupo, tivemos 5 estudantes, e trouxemos o relato de três deles.

- *Acredito que a metodologia usada é muito complexa (com muitos rodeios, diz muito sem nada dizer)* (Estudante A6).
- *Não, acho que a metodologia utilizada não está facilitando a aprendizagem* (Estudante A24).
- *Não. Porque ele está usando termos muito complexos, onde dificulta. Pois nem todos aprendem da mesma forma* (Estudante A23).

Escutar e auscultar, nas entrelinhas, esses estudantes, foi indispensável como comenta Lorenzato (2010). Fazer emergir essas marcas da influência da metodologia de ensino, na aprendizagem, a partir da visão deles, foi essencial. Talvez para nós algumas dessas marcas sejam imperceptíveis, mas precisam ser (re)interpretadas como possibilidade de transformação para nossa prática, e precisamos, sim, saber filtrar alguns apontamentos. Por exemplo, a visão apontada pelo estudante A25 é completamente oposta à visão do estudante A6. Dessa forma, poderíamos refletir: Até que ponto nós podemos considerar o que eles estão pensando? Será que eles tinham maturidade para avaliar nosso trabalho? De qualquer forma, o que devemos ter em mente e o que podemos aprender e refletir com essas duas respostas. A partir do que respondeu o estudante A25, parece que estávamos no caminho certo. Já a resposta do estudante A6 nos faz refletir que precisamos melhorar a cada dia. Esse é aquele que, podemos dizer, precisava de uma conversa mais individual, para que trouxesse melhores informações e mais detalhes sobre o que realmente estaria dificultando o seu aprendizado.

5.1.4.3 EXPECTATIVAS DOS ESTUDANTES EM RELAÇÃO AO DESEMPENHO EM CÁLCULO I

Um aspecto significativo, quando se trabalha com estudantes repetentes, é a motivação. *A motivação, no contexto escolar, tem sido avaliada como uma determinante crítica do nível e da qualidade da aprendizagem e do desempenho* (BORUCHOVITCH; GUIMARÃES, 2004, p. 27). Segundo esses autores, um estudante motivado mostra-se ativamente envolvido no processo de aprendizagem, engajando-se e persistindo em tarefas desafiadoras, despendendo esforços para que a sua aprendizagem aconteça.

Para descrever o que evidenciamos das expectativas dos estudantes com relação ao seu desempenho na disciplina de Cálculo, elaboramos, no questionário 2 (Apêndice A), a pergunta de número 12: **Quais sãos suas expectativas em relação ao seu desempenho neste semestre na disciplina de Cálculo I?** Para responder a esse questionamento, oferecemos aos estudantes algumas opções de respostas, mas eles poderiam também acrescentar outros itens. No quadro a seguir, trazemos os dados quantitativos:

Quadro 5 – Expectativa dos estudantes para seu desempenho em Cálculo I

Opções de respostas	Estudantes	Razão percentual
Serei aprovado com facilidade	A2, A18, A19, A2, A24, A26 e A28,	7/29 = 24,13%
Serei aprovado, mas terei dificuldade	A1, A3, A4, A5, A8, A9, A10, A11, A13, A14, A15, A16, A17, A20, A23 e A25	16/29=55,17%
Tenho dificuldade e acho que não serei aprovado	A7, A12 e A29	3/29=10,34%
Prefiro não responder a essa pergunta	A22	1/29=3,44%
Outras	A6 e A27	2/29=6,89%

Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Analisando as informações do quadro acima, podemos verificar que quase 80% dos estudantes da turma acreditavam que, dessa vez, seriam aprovados, e apenas um pouco mais de 10% da turma acreditavam que não. A partir das conversas informais com estudantes repetentes de turmas anteriores e da nossa experiência em trabalhar com esse tipo de estudante, constatamos que muitos começam o período letivo com pouca expectativa de aprovação. Eles esperam as primeiras semanas para observarem as atitudes dos professores com relação ao processo avaliativo e a forma como o professor vai conduzir a disciplina. Segundo Goméz Chacón (2003, p. 67), *os estudantes criam uma série de expectativas sobre como deve ser a forma pela qual o professor deve ensinar-lhes matemática. Quando a situação de aprendizagem não corresponde a essas crenças produz-se uma grande insatisfação, que interfere na motivação do aluno*. Essa insatisfação faz com que se sintam incapazes de acompanhar a disciplina, e alguns abandonam a disciplina logo nas primeiras semanas de aula.

Com base nessas informações e de alguns relatos que observamos nesse primeiro instrumento para conhecer melhor esses estudantes, foi possível verificar que eles estavam mais motivados. Podemos verificar isso a partir dos dados levantados acima e dos relatos de alguns estudantes.

- *Pretendo ser aprovado neste semestre. Devido à forma de aprendizado que estou adquirindo neste semestre, vejo que estou crescendo e tendo um bom desempenho* (Estudante A27).
- *Ouvia dizer que essa matéria era muito difícil, depois que comecei a cursar, percebi que, com estudo, era possível obter aprovação* (Estudante A21).
- *Diziam que a matéria era difícil, agora vejo que é possível passar* (Estudante A26).

Foi essa a realidade que percebemos e que pode ser entendida e vista sobre os mais diversos olhares. Para nós, foi importante considerar e acreditar que tínhamos uma turma de estudantes motivados. Para Boruchovitch e Guimarães (2004), embora não se desconsiderem as crenças, conhecimentos, expectativas e hábitos que os estudantes trazem para a escola a respeito da aprendizagem e da motivação, o contexto instrucional imediato, ou seja, a sala de aula torna-se fonte para o nível de envolvimento do aluno. A motivação intrínseca do aluno pode ser influenciada principalmente pelas ações do professor, que pode funcionar como um disparador externo de motivação como argumenta Santos (1997).

5.2 ANÁLISE DO PERFIL DOS ESTUDANTES SELECIONADOS

Nesta seção trazemos nossas interpretações sobre o percurso acadêmico, características pessoais, e expectativas de aprendizagens em relação à disciplina de Cálculo I dos sujeitos da pesquisa cujas respostas analisamos com mais profundidade.

Estudante A1

O estudante A1 tem 45 anos, é moreno, de estatura média. É uma pessoa tímida, educada, calma e muito batalhadora. Tem que conciliar o estudo com o trabalho. Frequentou o ensino fundamental e o médio em escolas públicas. Julgava-se, no ensino básico, como um aluno regular. Gostava de estudar conjuntos, equações (1º e 2º graus) e logaritmos, mas não geometria e alguns assuntos de álgebra do ensino médio. É aluno do curso de Engenharia Agronômica e, naquele semestre, ele estava matriculado em seis disciplinas. Escolheu o curso de agronomia por falta de opção e disse que estava apaixonando-se pelo curso. Estava cursando, pela terceira vez, as disciplinas de Física I e Cálculo I. Essas eram as que ele julgava ter mais dificuldade. Estudava em média uma hora por dia para a disciplina de Cálculo I. Aproveitava as horas de folga do trabalho para revisar cada conteúdo estudado na semana e colocar os conteúdos em dia. No seu relato ele afirma:

> Os motivos que me levaram a repetir a disciplina de Cálculo são minhas dificuldades no aprendizado das disciplinas de exatas, a pouca base do ensino médio e o pouco tempo disponível para estudar. Acredito que, com ajuda dos monitores e com projetos de estudos com o professor da disciplina, conseguirei superar essas limitações. (Questionário 2 em 17/2/2014)

Sobre os conteúdos de Cálculo que o estudante A1 julgava ter aprendido, ele respondeu, nos dois questionários, o conteúdo de limites, e o que não conseguiu aprender, foi o conteúdo de derivadas. Acreditava que as metodologias usadas pelos professores de Cálculo durante as aulas eram excelentes. Segundo ele, os professores procuravam trabalhar, em alguns momentos, em pequenos grupos, e depois individualmente. Os professores também motivavam os estudantes a irem ao quadro durante as correções das atividades e avaliações, e que a falta de tempo dele foi a principal justificativa para as suas reprovações. Sobre suas expectativas no semestre, em relação ao seu desempenho na disciplina de Cálculo, percebemos que teve uma melhora segundo ele. Observamos isso se olharmos suas respostas no estudo exploratório em 2013, quando respondeu a isso também, e agora em 2014. Vejamos seus depoimentos:

> ... tenho dificuldade, acho que não serei aprovado (Q2 em 25/6/2013).

> ... serei aprovado, mas vou ter dificuldade (Q2 em 17/2/2014).

O estudante A1 manteve, desde o início do semestre de 2014, uma postura de grande interesse em querer aprender. Procurou criar estratégias diferentes para tentar aprender.

> ... professor, tenho colocado minhas dúvidas em uma cartolina, pois consigo descrever e comentar naquele espaço vários assuntos e transcrever exemplos resolvidos que podem me ajudar nessas dúvidas e visualizar tudo ao mesmo tempo. (Depoimento ao professor-pesquisador durante as aulas extras em maio de 2014.)

No semestre de 2014, ele quase não faltou às aulas e, sempre que possível, participava das atividades extras com a turma. Conseguiu aprovação com 65% da nota, após a realização da prova final.

Estudante A13

O estudante A13 tem 21 anos, é moreno, de estatura média, e fala pouco. Tem um porte físico dessas pessoas que malham muito em academia. É um aluno educado, calmo, ponderado e, às vezes, muito fechado durante aulas. Tem um comportamento que oscila, às vezes, entre ser calado demais e, em outros momentos questionar e participar bem nas aulas. Perseverante em seus objetivos, é o aluno da turma de repetentes que mais frequentou a disciplina de Cálculo I. Essa é a quarta vez que frequentava a disciplina. Em todos os semestres em que foi aluno do professor-pesquisador, ele iniciava, e sua referência era a primeira avaliação. Se não conseguia uma nota expressiva, abandonava a disciplina. Disse que isso se repetiu por três vezes. Estudou o ensino fundamental e o médio em escolas públicas. Seu desempenho em matemática, segundo ele, era ótimo. Os conteúdos de matemática, que mais gostava de estudar para ele, eram todos, e disse que não gostava somente da disciplina de Língua Portuguesa.

O estudante A13 explica que:

> ... sempre fui bom em matemática, é a matéria que eu mais gostava desde o ensino fundamental, já no ensino superior, eu não estou indo do jeito que eu esperava. (Questionário 2, 24/6/13)

Essa observação é bem interessante no que se refere à mudança de desempenho de muitos alunos do ensino básico para o superior. Observamos que alguns que se consideravam ótimos e bons em matemática no ensino básico passaram a não mais gostar de matemática ou declararam uma queda no seu rendimento. Fica o seguinte questionamento: O que, de fato, pode estar causando essa mudança de rendimento? Podemos pensar em algumas hipóteses que poderiam ser analisadas separadamente ou combinadas, tais como: i) os conteúdos ficam mais complexos e apresentam maior rigor; ii) a metodologia usada pelos professores da graduação é muito diferente daquela utilizada na escola básica; iii) a carga horária de estudo tem que ser maior na graduação, e os alunos não compreendem isso; iv) a velocidade com que os conteúdos são passados é muito maior na graduação; v) os professores não se preocupam muito em conhecer as dificuldades e as limitações dos seus alunos e deixam que os alunos mesmos reconheçam essas lacunas; e vi) a falta de base dos conteúdos de matemática básica. Enfim, poderíamos aqui enumerar infinitamente vários argumentos, mas ficam esses para podermos refletir.

O estudante A13 é estudante do curso de Agronomia. Ele argumenta que escolheu o curso porque se identifica muito com a área. No semestre da pesquisa, ele estava matriculado em cinco disciplinas. A que ele sentia mais dificuldade era a Física, e não sabia explicar o porquê. Dedicava de quatro a cinco horas por semana para estudar Cálculo e, para ele, esse era o tempo necessário para que obtivesse um bom desempenho. Quando começou a frequentar o curso, ouvia falar que era:

> ... uma matéria “puxada”. (Questionário 2, 25/6/13)

> ... uma matéria que é preciso estudar muito. (Questionário 2, 17/2/14)

Depois que frequentou a disciplina por várias vezes, relata:

> ... após frequentar o curso compreendi o que me falavam. (Questionário 2, 25/6/13)
>
> ... eu concordo com o que ouvi dizer. (Questionário 2, 17/2/14)

O estudante A13 confirma um discurso que parece hegemônico entre os estudantes repetentes. Quando analisamos os motivos que o levaram a repetir a disciplina de Cálculo e que tipo de ajuda ele necessitava para superar, ele respondeu:

> ... a nota da primeira avaliação que é minha referência. Para superar essa dificuldade só depende de mim. (Questionário 2, 25/6/13)
>
> ... o que me levou repetir tantas vezes a disciplina foi a falta de compromisso com o curso e minha vida. Para superar esse obstáculo é algo muito individual, primeiramente tive que me auto ajudar. (Questionário 2,17/2/14)

Ao procurarmos compreender essas respostas do estudante A13, parece que dois pontos foram destacados por ele. Mesmo acreditando no discurso de que a disciplina de Cálculo é complexa, ele sugere que só depende do esforço de cada um para superar isso tudo e conseguir passar. Ele destaca isto ao comentar também que ele decide se continua ou não no curso a partir do resultado da primeira avaliação. Assim, podemos verificar que ele tira um pouco do peso do argumento de Cálculo é difícil e que o resultado satisfatório depende exclusivamente do esforço do aluno.

Nos dois instrumentos de pesquisa que denominamos de questionário 2, ele respondeu que aprendeu limite e derivada, mas que, nas avaliações, ele não foi bem. Sobre a metodologia utilizada pelos professores, relatou que era suficiente para ele entender o conteúdo. Mas nesse último semestre, ele questionou por que muitas aulas foram extras e foram usadas somente para revisar conteúdos da matemática básica e limites. A respeito de suas expectativas em relação ao próprio desempenho nesse último semestre na disciplina de Cálculo, o estudante A13 disse acreditar que seria aprovado e que não teria dificuldades com relação aos conteúdos ministrados na disciplina. De fato, o estudante A13 foi aprovado com 67% do total da nota e não foi preciso que fizesse a avaliação final da disciplina.

Estudante A19

A estudante A19 tem 21 anos, tem estatura baixa, e é uma pessoa prestativa e simpática. Não trabalha, e está cursando Licenciatura em Ciências Agrárias. Aluna dedicada e preocupada com sua aprendizagem. Na sala de aula, socializa os conhecimentos com os colegas da turma e está sempre disposta a ajudar os que têm mais dificuldade. Quanto ao seu desempenho em matemática nos anos anteriores (ensinos fundamental e médio), acreditava que era bom. Estudou o ensino fundamental e o médio em escolas públicas. Quando questionada sobre por que tinha escolhido o curso de licenciatura, ela respondeu:

> ... gosto da área do magistério e este curso é bem amplo para o mercado de trabalho. (Questionário 2, 24/6/2013)
>
> ... escolhi o curso de licenciatura, pois me identifico pela área, podendo atuar em diversas áreas que o curso possibilita. (Questionário 2, 17/2/2014)

Podemos perceber que a estudante A19 é uma pessoa convicta em relação ao curso que escolheu. Quando questionada sobre quais conteúdos da matemática ela gostava de estudar em 24/6/2013, respondeu que seriam as operações elementares (soma, divisão e multiplicação), e o conteúdo de que não gostava era função. Em 17/2/2014, ela optou por não responder a esse questionamento. No primeiro semestre de 2013, ela estava matriculada em 8 disciplinas e ficou reprovada somente em Cálculo I. No primeiro semestre de 2014, estava matriculada em seis disciplinas, incluindo a disciplina de Cálculo I.

Quanto a suas limitações e dificuldades de aprendizagem, ela citou as disciplinas de Química Orgânica e Cálculo I, no primeiro questionário em 25/6/2013. Também disse que um dos motivos da sua dificuldade era a falta de base. No segundo questionário, em 17/2/2014, ela descreveu que as disciplinas mais complexas eram: Genética e Cálculo I. Um dos motivos explicados era de que essas disciplinas ocorriam no mesmo dia, tornando-se cansativas, uma vez que ambas exigiam muito cálculo. A respeito de seus hábitos de estudos, ela relatou, nos dois questionários, que estudava em torno de duas horas por dia e acreditava que o ideal seria, no mínimo, umas três ou quatro horas além do período que fica na faculdade.

A estudante A19 relata que quando começou a frequentar o curso, ouvia falar que a disciplina de cálculo era:

> ... uma disciplina difícil e após frequentar, tive a conclusão que é bem complicado, ainda mais para quem não teve base. (Questionário 2, 25/6/13)
>
> ... uma disciplina que necessita de estudos diários fora da sala de aula. Constatei que realmente precisa de uma dedicação. (Questionário 2, 17/2/14)

Quando analisamos esses dois momentos em que a estudante A19 descreve suas convicções sobre a disciplina de Cálculo, verificamos que, no primeiro momento, ela traz que a disciplina é difícil, que depende se o aluno tem uma boa base ou não, de conteúdos da matemática básica. Parece que ele não muda sua convicção sobre a complexidade da disciplina e a falta de base é segundo ele um dos fatores poderá decidir se haverá ou não aprendizagem em Cálculo. Já em 2014, parece acreditar que um aluno dedicado pode ser capaz de superar esses obstáculos. Nos dois momentos, descreveu que precisava de mais tempo para dedicar à disciplina. Comenta que aprendeu o conteúdo de limites nos dois questionários e que não conseguiu aprender derivada nesse último semestre.

Sobre a metodologia usada pelos professores para conduzir a disciplina, ela assinalou:

> ... a metodologia está sendo suficiente para entender a matéria, pois, a meu ver, consegui aprender a matéria. (Questionário 2, 25/6/13)
>
> ... os métodos que estão sendo utilizados são bastante diferenciados. Isso tem possibilitado uma assimilação maior dos conteúdos abordados. (Questionário 2, 17/2/14)

A estudante A19 criou boas expectativas em relação ao seu desempenho na disciplina nesse semestre de 2014. Ela informou que pretendia ser aprovada, e um dos motivos dessa confiança era a forma de ensino diversificado que estava sendo promovido. Afirmou que com isso, via que estava aprendendo e tendo um bom desempenho. Ela conseguiu ser aprovada com 65% da nota, sem precisar fazer a prova final.

5.3 ATIVIDADE DIAGNÓSTICA

Ao trabalhar no estudo definitivo com uma turma de estudantes repetentes da disciplina de Cálculo I, precisávamos ter alguns diagnósticos iniciais. Tínhamos que obter uma ideia inicial de quais eram as principais limitações da turma com relação aos conceitos da matemática básica. Necessitávamos também de identificar o que já tinham aprendido e/ou sabiam sobre limites. Alguns desses conteúdos da matemática básica seriam fundamentais para a compreensão e resolução de exercícios sobre limites de funções, como por exemplo, o conhecimento mínimo das funções elementares (funções 1º e 2º graus, constante, modular, exponencial, logarítmica), simplificações algébricas e outros.

Tendo como referência a experiência que tivemos com a turma do estudo-piloto, sentimos a necessidade de ter uma panorâmica do conhecimento que eles traziam, em especial sobre o tema de nossa pesquisa, limites de funções reais. Temos consciência de que muitos conceitos matemáticos, apresentados nessa atividade e em outras tarefas que realizamos não se iniciaram em um *território virgem* (MURILLO, 2004, p.16) (grifo nosso). A partir das conversas informais com a turma, no horário extra que foi criado para estudo de Cálculo, e das respostas que coletamos no primeiro questionário dessa pesquisa e nas entrevistas, foi possível constatar que alguns estudantes desistiram da disciplina de Cálculo I, nos semestres anteriores, logo após os professores divulgarem as notas nas primeiras avaliações.

Quando olhamos as ementas dos cursos de Agronomia e LICA (Licenciatura em Ciências Agrárias) e verificamos os conteúdos abordados pelos professores nas primeiras avaliações da disciplina de Cálculo I (Anexos A e B), constatamos alguns detalhes importantes. Podemos perceber que, nas primeiras avaliações, geralmente são cobrados conhecimentos sobre a matemática básica (ensino fundamental e médio). Ademais, os professores cobram em suas provas conhecimento das funções reais e, especialmente, o cálculo de limites de funções reais, em que o aluno precisa ter, no mínimo, o conhecimento das principais propriedades dos limites.

Segundo Sad (1998, p.32), nós, professores, devemos estar atentos aos significados que os estudantes atribuem ao conceito de limite, buscando, através *do lugar de onde está*, ou seja, quais os conceitos que esses estudantes realmente demonstram ter aprendido. Com isso, minimizar as dificuldades desse conceito, para que esse estudante tenha possibilidade de transcender a um *novo lugar*. Quando realizamos essa atividade diagnóstica, esse era um dos nossos propósitos. Acreditamos que, se tivermos consciência do que esses estudantes repetentes já são capazes de compreender e resolver de atividades que envolvam os conceitos de limite e limites de funções, nós teremos a chance de ajudá-los em suas principais limitações sobre esses conceitos iniciais de Cálculo.

Os fatores apresentados e a finalidade de fazermos uma caminhada diferenciada com essa turma de estudantes repetentes foram os principais motivos que nos levaram a elaborar e executar essa atividade diagnóstica.

5.3.1 Execução da atividade

Essa atividade diagnóstica foi realizada no dia 10 de março de 2014, durante duas aulas de 50 minutos. A atividade era composta por três questões que envolviam o conteúdo limites de funções reais. A atividade foi realizada individualmente e entregamos uma questão de cada vez, à medida que os alunos iam concluindo as questões. Participaram dessa atividade 19 alunos da turma de repetentes, e todos fizeram e entregaram suas resoluções.

5.3.2 Questionamentos e objetivos da atividade diagnóstica

Quando elaboramos essa atividade, estávamos pensando nos seguintes questionamentos:

a) Será que os estudantes repetentes conseguem calcular limites de funções polinomiais (funções contínuas)? E limites de funções racionais (contínuas ou não, em um determinado ponto)?

b) Quais as estratégias de soluções os estudantes usariam quando se deparassem com limites de funções racionais em que, no momento que substituíssem os valores de x, encontrariam uma indeterminação do tipo 0/0?

c) Quais estratégias eles usariam para calcular o limite de funções a partir dos gráficos das mesmas?

A partir dos questionamentos acima, traçamos os seguintes objetivos:

1- Verificar se os estudantes compreendem a noção de limite de uma função em um determinado ponto, a partir de uma perspectiva aritmética (simplesmente substituir o valor numérico na questão 1), algébrica (questão 2) com as funções racionais, em que o valor de x possui algumas restrições e geométrica (questão 3), a partir do gráfico de uma função;

2- Identificar quais os conhecimentos mínimos de função os estudantes trazem sobre domínio, contradomínio, imagem e gráfico de funções reais, para determinação de limites;

3- Analisar e classificar os acertos e erros apresentados nesse instrumento diagnóstico, com o objetivo de elaborarmos estratégias de ensino (atividades, formulação de grupos de estudos com trabalhos individuais e/ou em grupo), para que pudéssemos direcioná-los em seus estudos e orientá-los em suas dificuldades e corrigir os erros que eles apresentassem.

5.3.3 As respostas da turma

Na elaboração dessa atividade, tivemos o cuidado de tentar satisfazer às três representações (numérica, algébrica e geométrica) de alguns limites de funções reais, pois consideramos que é importante para a compreensão de um conceito matemático, passar pelo menos por essas representações. Segundo Hitt e Cortés (2005) é importante promover uma visualização matemática, utilizando diferentes representações, e fazer uso reflexivo de novas tecnologias que permitam dar um significado concreto das noções matemáticas. Como cada questão dessa atividade tinha características diferentes, iremos descrevê-las e analisá-las separadamente. No final das análises dessa atividade, trazemos algumas conclusões iniciais dessa atividade diagnóstica e informamos de que maneira ela nos ajudou na elaboração de outras atividades.

Descrevemos, a seguir, algumas características que consideramos relevantes de cada um dos itens da atividade:

Questão 1. Calcule os limites, caso existam:
a) $Lim_{x \to \sqrt{3}} 10 =$ b) $Lim_{x \to 3}(2x-1) =$ c) $Lim_{x \to -2}(x^2+x-1) =$ d) $Lim_{x \to 3}\left(\dfrac{4x-5}{5x-1}\right) =$

Na primeira questão, pensamos em funções reais nas quais os valores de x, para onde o limite tenderia, estariam definidos para todos os valores de x$\in R$ e, também, no ponto exigido, por se tratarem de funções contínuas no ponto determinado para x. E também pensamos em funções racionais em que o valor x estaria definido em seu domínio. A partir dessas características apresentadas por essas funções, o cálculo do limite para essas funções seria $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Portanto, seria necessária apenas uma simples substituição do valor numérico para x, ou eles poderiam atribuir valores próximos dos valores solicitados para x e concluir, pelo teorema dos limites laterais, o valor do limite da função naquele ponto. Resumidamente: nessa primeira questão, todas as funções estavam definidas no ponto em que se pretendia determinar o limite.

Consideramos que os itens dessa primeira questão foram elaborados em um nível de *compreensão instrumental,* segundo Skemp (1976), porque se exigiam do aluno conhecimentos de regras e algoritmos para a resolução, por se tratarem de funções contínuas em que o $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, ou seja, era necessário apenas que os estudantes substituíssem o valor de x, dado na função, para a determinação do valor do limite da função naquele ponto.

5.3.3.1 CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS NECESSÁRIOS

Na primeira questão, tínhamos quatro itens. No primeiro, colocamos (a) uma função de valor constante e, nos itens (b) e (c), as funções eram polinomiais do 1º e 2º graus, respectivamente. No item (d), tínhamos uma função racional, cujo domínio era D = {x$\in R / x \neq \dfrac{1}{5}$}.

Na resolução do primeiro item (a), o aluno precisaria reconhecer o comportamento da função constante e concluir que $\lim_{x \to a} c = c$, em que c é uma constante real qualquer. Nos itens (b) e (c), como usamos funções polinomiais contínuas, em que x estava definido para qualquer valor real x, pensamos que se lembrassem de que se f é contínua em x=a, temos que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Assim, em cada caso seria necessário somente a substituição numérica do valor de x indicado para obter os limites solicitados. Portanto, o aluno necessitava ter um conhecimento básico para a resolução de expressões numéricas. No item (d), a função racional estava definida no ponto x=3, em que se pedia o cálculo do limite. Assim como nos itens anteriores (b) e (c), se exigia do estudante uma simples substituição numérica do valor de x. Poderíamos pensar também em modos alternativos de resolver alguns desses limites propostos na primeira questão. Por exemplo, no item (b) e também nos itens (c) e (d), teríamos as seguintes opções de ir demonstrando o passo a passo do cálculo de limites ao usar algumas propriedades básicas de limites de funções, ou definições de continuidade:

i) usando propriedades de limites: $\lim_{x \to 3}(2x-1) = 2\lim_{x \to 3}(x) - \lim_{x \to 3}(1) = 5$;
ii) usando definição de continuidade: Como f é contínua, temos que $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 5$;
iii) por aproximações numéricas para valores próximos de três, tanto pela esquerda como pela direita do número 3.

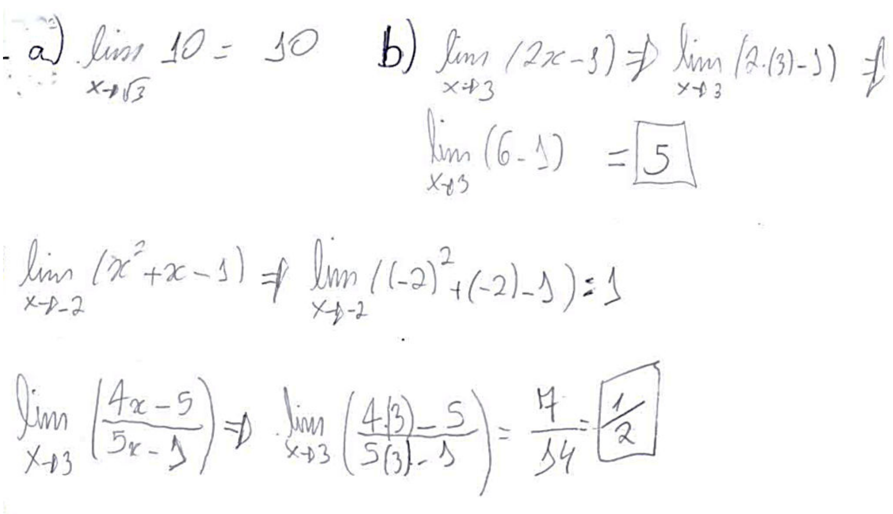
5.3.3.2 ALGUMAS CATEGORIAS DE ERROS

Numa primeira leitura das soluções apresentadas nessa atividade diagnóstica, percebemos uma grande variedade de respostas, e foram, inicialmente, criadas oito categorias. Entretanto, após sucessivas leituras, refinamos, obtendo-se, ao final, três categorias. No primeiro grupo, temos as soluções dos estudantes que resolveram corretamente os valores dos limites das funções, mas que apresentaram algum erro na escrita matemática. No segundo grupo de categorias, temos aqueles que erraram os cálculos dos limites, por não conseguirem resolver corretamente as expressões numéricas encontradas nas resoluções. No terceiro, os estudantes que utilizaram de maneira equivocada alguma propriedade ou definição de limites nas suas resoluções. Analisamos as respostas da turma com o objetivo de, além de classificar os erros apresentados, buscar desenvolver estratégias de ensino que pudessem auxiliá-los em suas dificuldades iniciais sobre limites de funções.

Categoria 1: Corresponde às resoluções corretas para os valores numéricos dos limites das funções, mas que apresentam algum erro na escrita matemática. Nesse caso, foram encontradas as soluções dos estudantes A1, A6, A13, A19, A23, A25, A27, A29 e A30. Com exceção do item (a) da questão, que se tratava de uma função real contínua constante, os alunos substituíram diretamente os valores de x nas funções, seguindo provavelmente a ideia de que as funções dos itens (b) e (c) eram polinomiais, portanto, satisfaziam a definição de continuidade. Entretanto, não temos certeza se os alunos resolveram conscientes essas questões de que as funções dos itens (b) e (c) eram contínuas, e, portanto, bastava se recordarem de que se f é contínua, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

No item (d), temos uma função racional definida para x=3, pois esse número pertence ao domínio da função, não acarretando, dessa forma, uma descontinuidade da função nesse ponto. Portanto, os alunos poderiam substituir o valor de x diretamente por 3, mesmo se eles tivessem consciência de que, necessariamente, x não precisa ser 3 quando solicitamos para calcular o limite da função para valores de x próximos de 3. Trazemos a resolução de dois estudantes, sendo que os demais alunos desse grupo resolveram de maneira semelhante.

Figura 10 – Solução da primeira questão diagnóstica pelo estudante A13

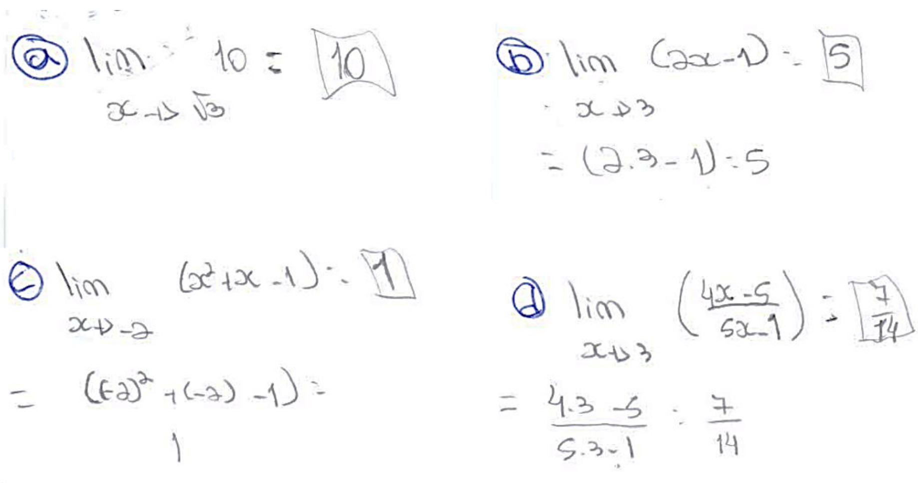


Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Analisando as respostas desse estudante, é possível perceber que, mesmo apresentando os valores numéricos dos limites corretamente, verificamos que ele ainda não compreendeu que, quando substituímos os valores numéricos de x, não é mais necessário repetir o símbolo “lim”. Esse tipo de erro foi considerado por Cury e Cassol (2004) como *lapsos de escrita*. Esse é um erro muito comum entre os estudantes, quando não exigimos que eles apliquem, de maneira correta, as propriedades dos limites de funções. Precisamos reforçar a importância de compreendermos e utilizarmos as propriedades corretamente. Os estudantes A23, A27 e A30 também cometeram esse mesmo equívoco. Por exemplo, no item c, seria:

$$\lim_{x\to -2}(x^2+x-1)=\lim_{x\to -2}(x^2)+\lim_{x\to -2}(x)+\lim_{x\to -2}(-1)=(-2)^2+(-2)+(-1)=1.$$

Figura 11 – Solução da primeira questão da atividade diagnóstica pelo estudante A25

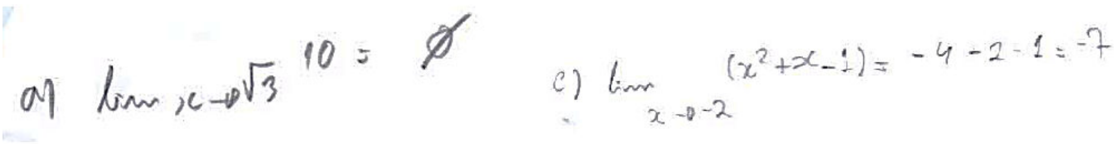


Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Na solução desse estudante, ele não comete o equívoco de repetir a palavra limite após ter substituído o valor numérico para x, mas também não aplica as propriedades dos limites.

Categoria 2: Corresponde às resoluções em que os alunos cometeram erros nos cálculos das expressões numéricas ou de propriedades de limites de funções de algum dos itens. Nessa categoria, temos os estudantes A3, A7, A9, A14, A15, A16 e A28. Trazemos, abaixo, alguns erros comuns que encontramos nas resoluções de alguns desses estudantes. Podemos dizer que não poderiam estar mais acontecendo, por acreditarmos que são dificuldades que eles mesmos poderiam superar. Observamos que ocorrem por falta de atenção na hora de resolver as questões e de conhecimentos simples sobre propriedades de potenciação com números reais, operações com números inteiros e fracionários. Nessa categoria, também há erros de matemática básica, como $(-2)^2=-4$.

Figura 12 – Solução da primeira questão da atividade diagnóstica pelo estudante A28



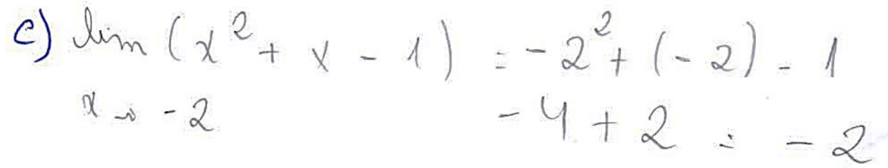
Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Verificamos que esse estudante ao resolver o item (a) não percebeu que se tratava de uma função constante igual a 10. Quando perguntamos por que considerava o resultado um conjunto vazio, ele nos respondeu que $\sqrt{3}$ era um número irracional, e 10 um número racional. Como são conjuntos disjuntos, acreditava que a solução seria um conjunto vazio. Podemos observar como o foco de atenção deste aluno estava bem distante do que era solicitado para calcular. Ele simplesmente olhou para os valores 10 e raiz de 3 e acessou em sua mente o que sabia a respeito desses números. E podemos nos questionar, será que este estudante entendeu o que envolve o cálculo de um limite? Será que este estudante entendeu que f(x) = 10, quer dizer que para qualquer valor de x do domínio desta função que a imagem vai ser igual ao valor 10? Será que ele sabe olhar para o gráfico desta função constante e sabe entender pelo gráfico o que seria calcular o limite?

Nós, professores, devemos parar e analisar em profundidade as respostas de nossos estudantes quer elas estejam corretas querem erradas, porque algo que nos parece muito simples quando elaboramos uma tarefa matemática pode ser interpretado de forma bem distinta na mente de nossos estudantes, como aconteceu com este aluno. Fizemos esse questionamento ao estudante porque foi o único aluno da turma que colocou essa resposta. Foi possível assim aprender com esta escuta mais atenta deste estudante de como ele pensou de forma diferente. Todos os demais colegas acertaram.

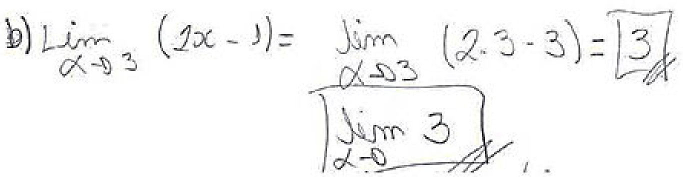
Constatamos que, realmente, esse estudante A28 não percebeu, ou mesmo não tinha conhecimento sobre limite de funções constante, ou, ainda, não reconheceu sequer que f(x)=10 seria uma função constante, logo seu limite, para qualquer valor que x tender, seria o próprio número 10. Já na resposta ao item (c), ele não conseguiu resolver sequer a expressão numérica correspondente ao limite, dando como resposta que $(-2)^2=-4$, de maneira equivocada. Isso reforça o que comentamos anteriormente: alguns alunos ainda têm dificuldades em resolver expressões numéricas com potenciação de números reais. O mesmo acontece com o estudante A3 na figura a seguir.

Figura 13 – Solução da primeira questão da atividade diagnóstica pelo estudante A3



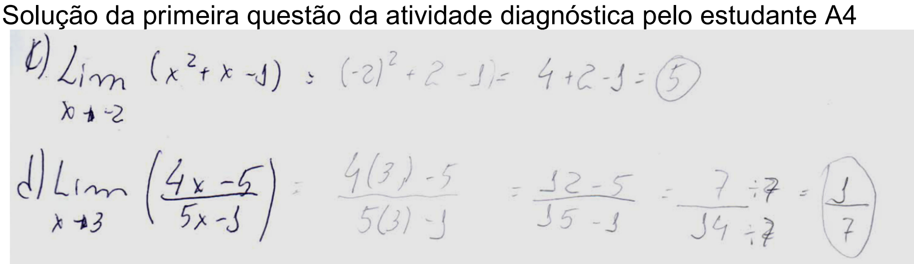
Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Figura 14 – Solução da primeira questão da atividade diagnóstica pelo estudante A15



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Figura 15 – Solução da primeira questão da atividade diagnóstica pelo estudante A4



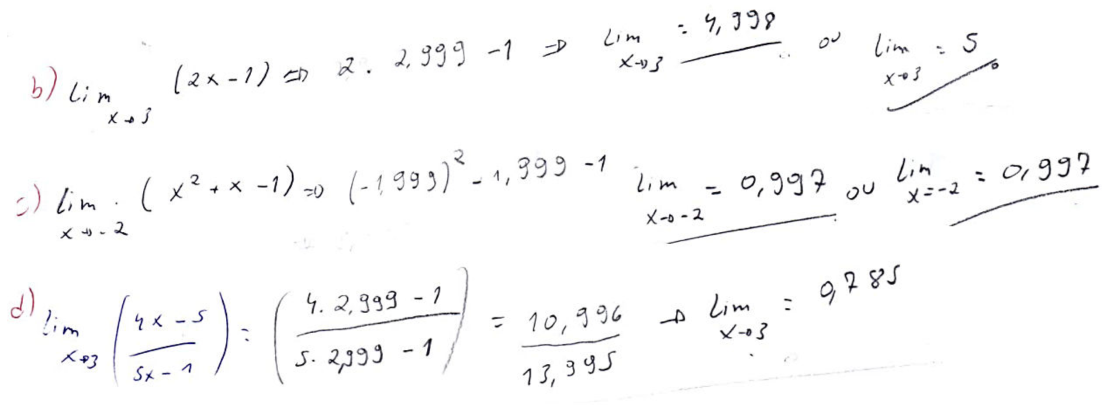
Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Trouxemos também essas resoluções equivocadas dos estudantes A15 e A4 nas figuras anteriores, porque foi importante termos essa panorâmica de como alguns ainda demonstravam dificuldades e equívocos em cálculos envolvendo conteúdos da matemática básica. Esses resultados nos ajudaram a planejar melhor nossas ações e aulas extras para orientá-los a superar essas limitações. A partir dessa constatação, percebemos que não adiantava ficar pensando em iniciar a disciplina com a definição de alguns conceitos básicos do Cálculo sem considerarmos essas limitações envolvendo conteúdos anteriores. Acreditamos que essas eram dificuldades bem pontuais que, ao longo do curso, esses alunos conseguiriam superar.

Os erros que observamos nas categorias 1 e 2, podemos dizer que tratavam de limitações e dificuldades com conteúdos da matemática básica. De certa forma, alguns estudantes reconheceram que essas funções eram polinomiais e contínuas. Portanto, para calcular o valor do limite da função, bastava usar a propriedade: se f é contínua, então, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Categoria 3: Corresponde às resoluções equivocadas na utilização da definição de limites laterais $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} = L$ de uma função em um ponto. Dois estudantes utilizaram essa definição.

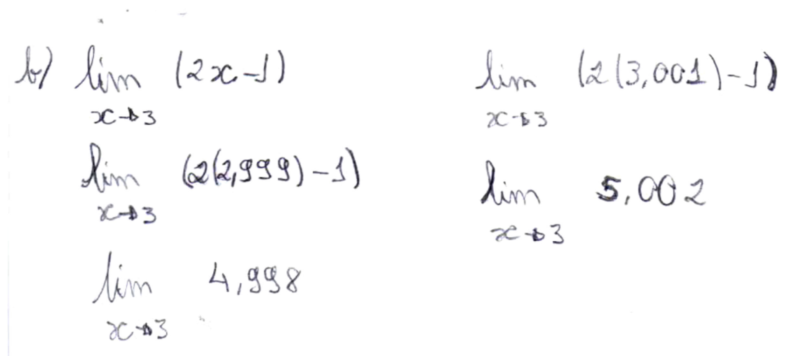
Figura 16 – Solução da primeira questão da atividade diagnóstica pelo estudante A5



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Analisando as resoluções desse estudante na Figura 16 para calcular os limites de algumas funções, verificamos que ele utilizou, de maneira equivocada, a definição de limites laterais. Primeiramente, ele adotou apenas um valor para aproximação do ponto solicitado para se calcular o limite. Em alguns momentos, o estudante A5 utilizou limite tendendo à esquerda, como é o caso das resoluções das letras *b*, e *d*. Em outro momento, utilizou limite tendendo à direita, como no item *c*. Mas nunca usou os dois casos para tentar aproximar o valor correto do limite da função. Além disso, suas respostas finais, como nas letras c e d, não são conclusivas, pois ele não adotou valores à esquerda e à direita do ponto x, e assim, indicou o valor do limite errado.

Figura 17 – Solução da primeira questão da atividade diagnóstica pelo estudante A24



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

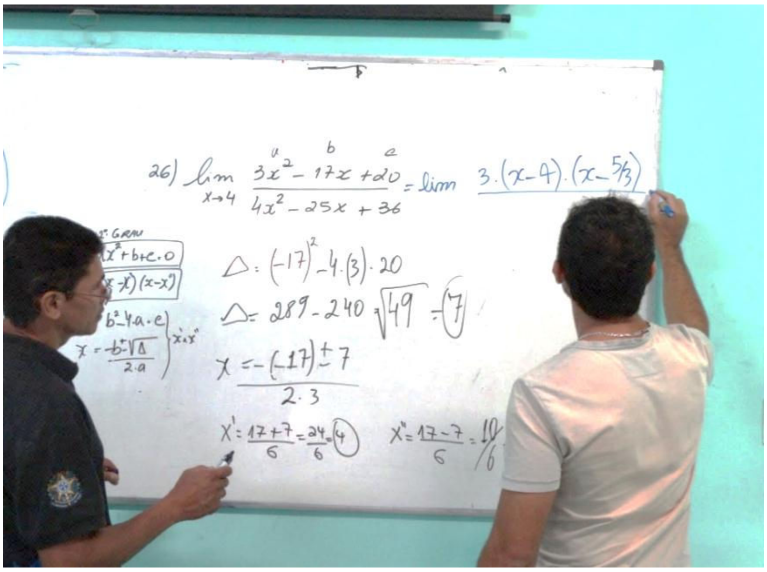
As resoluções das letras *c* e *d,* da questão 1, desse estudante A24, foram semelhantes às soluções apresentadas pelos colegas da categoria 1. Entretanto, no item (b), ele tentou calcular o limite por aproximações numéricas como o aluno A5 (Figura 16). Só que esse estudante A24, podemos dizer, adotou de maneira mais correta o teorema sobre limites laterais. Na sua solução, ele atribuiu valores corretos tanto para a direita como para a esquerda do ponto x=3, para resolver as expressões numéricas corretamente. Mas não concluiu exatamente qual o valor do limite da função quando x tende a 3, que, nesse caso, seria 5. Observando suas respostas, podemos ter duas interpretações. A primeira é que ele concluiu que os limites são os valores decimais encontrados, que são diferentes. Outra possível interpretação é que, como são valores próximos, mas diferentes, ele ficou sem concluir exatamente qual seria o valor do limite da função no ponto x=3.

Quando refletimos, posteriormente, sobre quais seriam as dificuldades desses dois estudantes para a conclusão do cálculo do valor do limite da função no ponto, podemos dizer que seriam algumas dúvidas específicas dos conceitos elementares do Cálculo. Segundo Sierpinska (1985), esse é um dos obstáculos relacionados à noção de limite, que a autora classifica como obstáculo à passagem ao limite considerando apenas aproximações*.* A justificativa da maioria para a utilização da técnica de aproximações numéricas era de que nenhum artifício matemático seria necessário para determinar o valor do limite. Por exemplo, podiam evitar o uso de simplificações algébricas em funções descontínuas em determinado ponto. Por exemplo, ao calcular o $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$, eles achavam que era mais fácil atribuírem valores próximos de 2 e observarem para onde a função estava tendendo. Segundo eles, resolver uma expressão numérica era mais fácil do que ficar procurando técnicas de simplificações de funções ou propriedades dos limites que pudessem ajudar no cálculo.

Quando eles observavam que, para determinados limites de função, se fazia necessário conhecer e analisar várias características das funções, eles diziam que isso era complexo. Eles passaram a notar que tinham que pensar e reconhecer vários aspectos da função antes de calcularem um limite. Perceberam que tinham que pensar e analisar qual era o tipo de função, suas principais características, como domínio, imagem e contradomínio. Também, saber qual seria sua representação gráfica, e analisar a continuidade ou descontinuidade da função. Assim, percebemos que eles questionavam que eram muitas variáveis para serem analisadas.

Na verdade, o que notamos foi que muitos estudantes preferiam seguir uma única linha de raciocínio para determinar o limite de uma função. Segundo eles, a utilização do teorema dos limites laterais seria a maneira ideal, porque eles só necessitariam de fazer algumas substituições numéricas. E, depois, deveriam verificar o comportamento da função o mais próximo possível do ponto em que se pretendia determinar o limite dessa função. Quando afirmamos que esse era um erro comum e específico do Cálculo, que temos verificado em testes e avaliações, os estudantes estranhavam. Verificamos que em muitos casos, acreditavam que poderiam usar esse teorema dos limites laterais para calcular o limite de todo tipo de função real. Portanto, necessitamos trazer em aulas de Cálculo contraexemplos que pudessem desmistificar essa ideia tão presente na mente deles de que podem usar algumas ideias sobre limites laterais nos cálculos de limites de quaisquer funções reais.

Figura 18 – Momento de interação dos estudantes na resolução de limites de funções racionais.



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Segundo Hitt (2003), as dificuldades de aprendizagem do conceito de limite iniciam-se com uma ideia que não é convenientemente transmitida nem esclarecida por alguns professores, que são as técnicas algébricas para avaliar os limites. Eles destacam os seguintes casos: a) quando o resultado do limite vai dar um inteiro, por exemplo, $\lim_{x\to 1} 2x^3+1$, deve-se substituir diretamente o valor da variável; b) quando o resultado do limite vai dar um número racional, por exemplo, em $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x+2}{x-6}$, o mesmo processo do item (a) pode ser usado; c) também podem ocorrer indeterminações no cálculo do limite, como $\dfrac{0}{0}$, $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$, nesse caso, deve-se remover a indeterminação por algum processo de fatoração.

Para Hitt e Cortés (2005), na realidade, muitas das dificuldades da compreensão do conceito de limite se devem pela maneira como o professor introduz o tema. Na realidade, o que acontece é que alguns não introduzem, em nenhum momento, tarefas de limites de funções reais envolvendo um processo infinito. Os exemplos e os exercícios de limites focalizam os mesmos aspectos, ou seja, tudo se reduz a uma substituição numérica. Assim, como verificamos em nossa pesquisa e também apareceu no trabalho de Hitt e Cortés (2005), essa ideia de apenas substituir valores parece prevalecer ao longo da formação dos estudantes, e são poucos os que conseguem ultrapassar esse obstáculo. Por esse motivo, futuramente, os estudantes, terão dificuldades para compreender o conceito de limite e para saber calcular adequadamente limites de algumas funções reais. Segundo esses mesmos autores, algumas dificuldades dos estudantes são provenientes da natureza da complexidade da noção de limite, e outras dificuldades estão por trás das ideias errôneas e/ou equivocadas que são passadas em aulas pelos professores de Cálculo.

5.3.4 Indução ao erro para desconstruir a ideia da substituição numérica

Para que pudéssemos gerar um conflito cognitivo a respeito da substituição numérica para o cálculo de limites, trouxemos um contraexemplo, para desarticular essa ideia de que as substituições numéricas eram ou poderiam ser suficientes para a resolução da maioria dos limites. O exemplo utilizado foi o seguinte: Encontre $Lim_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ (STEWART, 2013, p. 95).

Pedimos que resolvessem esse limite utilizando as substituições numéricas para valores de t próximos de zero, ou seja, t$\to 0^-$ e t$\to 0^+$. Solicitamos a um deles que resolvesse, no quadro, a questão tabulando, os valores. As aproximações que ele apresentou seguem abaixo:

Para valores de t$\to 0^-$ (lê-se t tendendo a zero pela esquerda)

Tabela 4 – Resolução do limite da função f(t) para t tendendo à esquerda de zero

t	**f(t)=** $\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
-0,1	0,166620
-0,01	0,166666
-0,000001	0,167936
-0,0000001	0,0512

Fonte: Elaborado pelo pesquisador (2014)

Para valores de t$\rightarrow 0^{+}$ (t tendendo a zero pela direita)

Tabela 5 – Resolução do limite da função f(t) para t tendendo à direita de zero

t	**f(t)=** $\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
0,1	0,166620
0,01	0,166666
0,000001	0,167936
0,0000001	0,0512

Fonte: Elaborado pelo pesquisador (2014)

Podemos verificar que temos uma mudança de valores de f(t), quando nos aproximamos cada vez mais de zero, tanto pela esquerda quanto pela direita. Esses valores encontrados levaram-no a pensar que f(t) talvez tendesse a zero, quando t fosse se aproximando cada vez mais de zero. Entretanto, quando resolvemos esse limite por uma simplificação algébrica, encontramos como resultado o valor 1/6. Esse exemplo nos mostra que não podemos confiar sempre nas aproximações numéricas feitas com calculadoras e computadores para cálculo de todos os tipos de limites. Esse erro se dá pelo fato de que as calculadoras e os computadores são limitados numericamente e não conseguem fazer aproximações quando determinamos uma grande quantidade de casas decimais que extrapolem a sua memória.

Uma das formas de resolver este $Lim_{t\rightarrow 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$, seria fazer uma manipulação algébrica para encontrar uma função equivalente a essa, multiplicando o numerador e o denominador dessa função racional por $\sqrt{t^2+9}+3$, obtendo uma função em que não encontraríamos uma indeterminação do tipo 0/0 quando x tender a zero. Portanto, poderíamos calcular o limite da função equivalente usando a definição de continuidade, ou seja, $\lim_{x\rightarrow a} f(x)=f(a)$.

5.4 LIMITES DE FUNÇÕES REAIS

Nesta seção trazemos análises de algumas soluções apresentadas pela turma e pelos três estudantes selecionados, referentes ao cálculo de limite de funções reais ao longo da pesquisa de campo. Os modelos de funções (polinomiais e racionais) que analisamos representam os principais tipos que foram utilizados em listas de exercícios, testes e provas. Os nossos objetivos, ao analisarmos as respostas desses estudantes, foram identificar e compreender acertos e erros dos estudantes em tarefas de limites de funções reais; identificar dificuldades de aprendizagem sobre conceito de limites de funções reais e compreender como os estudantes o utilizam no cálculo de limite de funções.

5.4.1 Limite de funções polinomiais do primeiro grau

Selecionamos funções polinomiais e racionais com as mesmas características (domínio, imagem e contradomínio) e mesmo grau de dificuldade, para que pudéssemos estabelecer um padrão de análise das respostas dos estudantes no caminhar da pesquisa. Apresentamos, nos quadros abaixo, as questões que escolhemos para análise. As questões foram divididas em duas categorias: funções polinomiais do 1º grau e funções racionais.

Quadro 6 – Limites de funções polinomiais

Questão	Etapa da pesquisa	Conhecimentos matemáticos para resolução	Data
$\lim_{x\to 3}(2x-1)$	2ª etapa	Noção de limite e suas propriedades; Cálculo do valor da função num ponto; Cálculo de expressões numéricas com números reais.	10/3/14
$\lim_{x\to 2}(3x+10)$	3ª etapa	Noção de limite e suas propriedades; Cálculo do valor da função num ponto; Cálculo de expressões numéricas com números reais.	01/4/14
$\lim_{x\to -3}(2x+4)$	Prova final	Noção de limite e suas propriedades; Cálculo do valor da função num ponto; Cálculo de expressões numéricas com números reais.	09/7/14

Fonte: Elaborado pelo pesquisador (2014)

Quando observamos os limites das funções reais descritas no quadro anterior, podemos constatar que esses limites possuem as mesmas características, por se tratarem de funções polinomiais do 1º grau. Consideramos esses limites como simples, porque, em seus cálculos, exigia-se do estudante que possuísse uma compreensão instrumental de como calcular limites de funções polinomiais de 1º grau, onde todas eram bem definidas e contínuas (SKEMP, 1976). Na segunda e terceira fases da pesquisa, os enunciados das questões em que esses limites apareceram eram: Calcule os limites, caso existam. Na prova final, o enunciado foi modificado para: Com base nas propriedades de limites, calcule os seguintes limites, justificando cada passo de sua resolução.

Podemos dizer que essa mudança no enunciado da questão teve como objetivo incentivar o aluno na resolução da questão a usar de maneira consciente as propriedades dos limites e os conceitos do cálculo, nesse caso, o conceito de função contínua. Nossa intenção foi "forçá-los"[39] a refletirem sobre os passos da sua resolução para que não apenas substituíssem os valores numéricos na função com o objetivo de encontrar o valor do limite. Acreditávamos que, dessa maneira, mesmo com uma questão simples, talvez pudéssemos gerar algum conflito cognitivo para, quem sabe, tornar esse conhecimento adquirido por ele em um conhecimento com característica de compreensão relacional (SKEMP, 1976).

No caminhar da pesquisa, passamos a refletir junto a nossa orientadora de que eram poucos os momentos em que adotávamos antes essa postura, na resolução dos exercícios de limites em sala de aula. Antes da pesquisa de doutorado nem sempre verbalizávamos a importância de aplicar as propriedades dos limites e de destacar quais são os conceitos de Cálculo que estão sendo envolvidos na resolução de cada questão. Acreditamos que esse nosso comportamento diferenciado poderia influenciar nossos alunos e, percebemos que quando exigimos que eles justifiquem suas respostas, as dificuldades aparecem.

As questões de limites, descritas no quadro 6, foram aplicadas em momentos diferentes da pesquisa, portanto, vamos analisá-las separadamente. Inicialmente, pensamos em observar os acertos e erros e criar categorias de erros para os três momentos simultaneamente. Mas, durante a transcrição dos dados para análise,

---

[39] A palavra forçar usada no sentido de exigir do aluno algumas reflexões sobre suas resoluções.

percebemos que, mesmo se tratando de limites semelhantes, tínhamos objetivos diferentes em cada um dos três momentos.

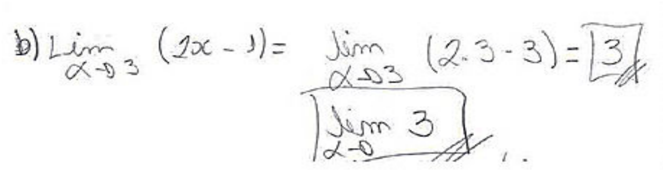
Na segunda etapa, tratava-se de uma atividade diagnóstica, portanto, nosso objetivo era verificar o conhecimento prévio do aluno. Na terceira, a questão foi aplicada na primeira avaliação sobre limites, e nosso objetivo com essa questão era verificar se eram capazes de resolver alguns limites simples. Na prova final, com toda influência das leituras, algumas análises iniciais dos dados e discussões de algumas teorias durante o doutorado com nossa orientadora e outros doutorandos, mudamos o anunciado de alguns itens. Agora, nosso objetivo passou a ser se o estudante era capaz de justificar sua resposta, para que, dessa forma, compreendesse as justificativas do cálculo do limite daquela função. Ele estava, na verdade, usando o conceito de função contínua, portanto, temos que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

A questão $\lim_{x \to 3}(2x-1)$ (Apêndice B) fez parte da atividade diagnóstica que foi aplicada para dezenove estudantes. Nessa questão, tivemos dezesseis soluções corretas ou parcialmente corretas. Consideramos soluções parcialmente corretas as do tipo apresentadas pelos estudantes A1, A13 e A19. Segundo Cury e Cassol (2004, p. 31), são erros de lapso de escrita, por exemplo, *o "esquecimento" da expressão "lim" no encadeamento das igualdades,* ou repetir o termo "lim", mesmo depois de fazer a substituição numérica da variável x. No grupo de soluções corretas consideramos a solução apresentada pelo estudante A9, em que ele não justificou seu cálculo, simplesmente escreveu o número 5 depois do sinal de igualdade, ou seja, $\lim_{x \to 3}(2x-1) = 5$.

As soluções erradas foram classificadas em duas categorias, descritas a seguir:

a) Erros de cálculo nas substituições. O estudante A15 transcreveu a função errada, e trocou o valor -1 da função por -3.

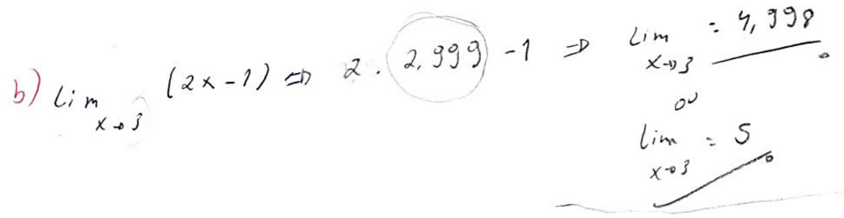
Figura 19 – Solução do limite de funções polinomiais pelo estudante A15



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

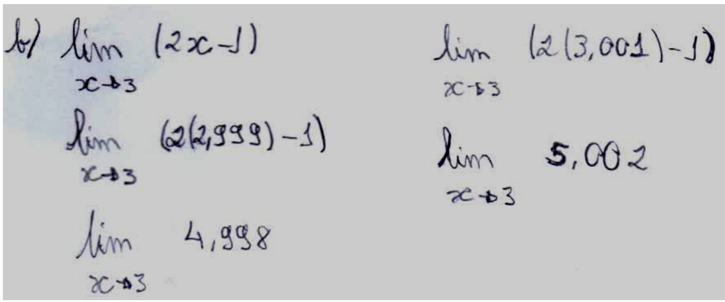
b) Erro na aplicação inadequada do teorema de limites laterais. Os estudantes A5 e A24 apresentaram soluções inconclusivas para o valor do limite da função. O estudante A5 afirmou que o limite pode ser 4,998 ou 5. Já o estudante A24 afirmou que pode ser 4,998 e 5,002.

Figura 20 – Solução do limite de funções polinomiais pelo estudante A5



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Figura 21 – Solução do limite de funções polinomiais pelo estudante A24



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Gostaríamos de destacar que os erros apresentados pelos estudantes A5 e A24 foram considerados de conceitos básicos do Cálculo. Ao examinarmos as respostas que os estudantes A5 e A24 forneceram, parece-nos que eles estavam em níveis diferentes para uma possível compreensão da definição de limites laterais. Uma vez que o estudante A24 considerou, na sua solução, valores para x menores do que 3 e valores maiores do que 3, ou seja, calcule $\lim_{x\to 3^-}(2x-1)$ e $\lim_{x\to 3^+}(2x-1)$ .No entanto, o estudante A5 considerou somente valores de x menores do que 3. Portanto, podemos dizer que o estudante A24 conseguiu demonstrar que possui uma forma mais elaborada do conceito de limites laterais.

A questão $\lim_{x \to 2}(3x+10)$ foi aplicada para 24 estudantes na primeira avaliação sobre limite (Apêndice C). Analisando as respostas dos estudantes, constatamos que dezenove alunos acertaram a questão apresentando os cálculos, quatro estudantes apenas escreveram que o valor do limite seria 16, sem nenhum tipo de justificativa, e um aluno deixou a questão em branco. Nessa avaliação, ninguém utilizou a definição de limites laterais para justificar o valor do limite. Essa era uma estratégia muito usada por eles para calcular limites no início do curso. Verificamos que, muitos alunos ainda continuavam errando na escrita, escrevendo o termo "lim" no encadeamento da igualdade, mesmo depois de atribuírem os valores para variável x. Acreditamos que esse tipo de erro continuava acontecendo, porque não consideravam relevantes os detalhes da escrita matemática, ou por não terem consciência de como os símbolos utilizados na matemática são carregados de significados.

A questão $\lim_{x \to -3}(2x+4)$ foi aplicada para quinze estudantes na prova final. O enunciado da questão solicitava aos estudantes que justificassem cada passo da sua resolução, apenas três alunos (A19, A14 e A26) apresentaram alguma justificativa que eram semelhantes entre si. Os estudantes A14 e A26 descreveram que *substituíram o número 3 na função para achar o limite*. O A19, conforme figura 22 abaixo, foi ainda mais sucinto "*usei somente substituição*". Arriscamo-nos a dizer que não podemos considerar esses argumentos como justificativa, pois acreditamos que não trazem nenhum argumento matemático, como, por exemplo, a ideia intuitiva de limite, propriedades, definições ou teoremas do Cálculo.

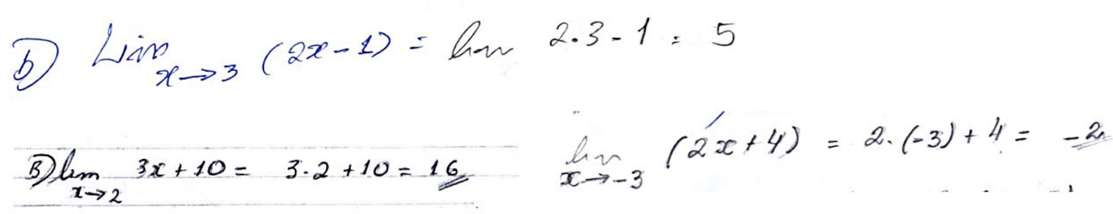
Analisando as soluções de A1, A13 e A19, das questões referentes a limite de funções polinomiais ao longo da pesquisa, verificamos que eles utilizaram, nas suas resoluções, talvez de maneira consciente ou inconsciente, a propriedade de que essas funções são polinomiais e contínuas para todo $x \in R$, portanto, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Eles cometeram alguns erros de escrita no encadeamento das igualdades, tipo de erro também presente no trabalho de Cury e Cassol (2004). Quando analisamos esses limites de funções polinomiais, perguntamo-nos: Será que essas questões de limites com funções polinomiais podem ajudá-los na compreensão do conceito de limite de funções?

Arriscaremos uma resposta, levando em consideração os conceitos do Cálculo que estão por trás de uma questão aparentemente simples, a partir da mudança de postura do professor que passamos a experimentar durante a pesquisa de doutorado. Primeiramente, nosso olhar é com relação à postura em sala de aula e no planejamento adotado pelo professor. Se só exigimos que eles calculem os valores numéricos dos limites, sem nenhum tipo de questionamento, o que de fato passamos a eles como mensagem?

Por exemplo, se nunca falamos ou damos exemplos quando resolvemos as tarefas iniciais de limites de que usamos as propriedades e também nunca perguntamos sobre qual propriedade ou quais teoremas eles estão utilizando na resolução das questões, o que eles interiorizam em suas mentes? Se também nunca questionamos quais seriam outras formas de calcular esse limite, que não sejam por uma substituição numérica do valor de x, arriscamo-nos a dizer que esse tipo de postura de professor em quase nada vai ajudar o aluno na compreensão, pelo menos da ideia intuitiva do conceito de limite de funções.

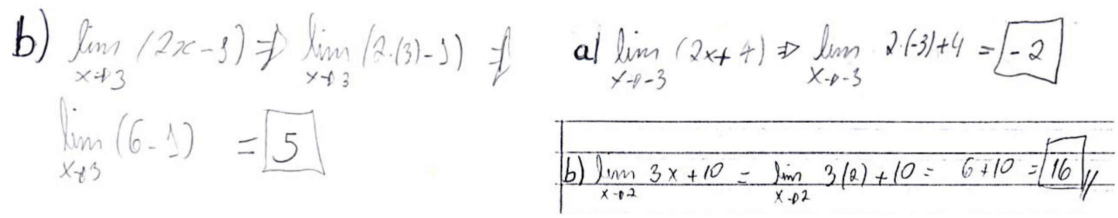
Mas, se o professor criar situações que desequilibrem essa ideia de que o limite se reduz apenas em substituição numérica, ele pode oportunizar condições para que o aluno desconstrua essa ideia. Nossa concepção desenvolvida durante a investigação de doutorado, em relação aos conceitos de Cálculo envolvidos na questão, é que, trazendo exemplos e contraexemplos que utilizem as diversas formas de representação das funções (algebricamente, graficamente e numericamente), podemos influenciar o aluno a utilizar as diversas formas de resolver o limite. Quem sabe assim os estudantes tentem fazer relações com os valores encontrados para os limites nessas diversas representações. Acreditamos, sim, que é possível o estudante criar e reconstruir pelo menos imagens conceituais (TALL, VINNER, 1981) da definição de limite de funções que possam ir se aproximando do que desejamos que eles aprendam.

Figura 22 – Soluções dos limites de funções polinomiais pelo estudante A1



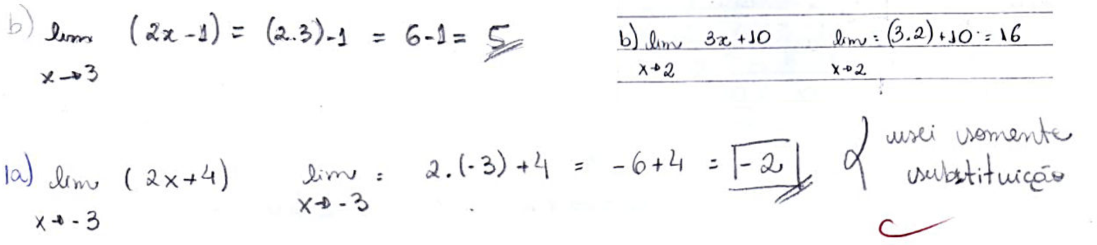
Fonte: Elaborado pelo pesquisador (2014)

Figura 23 – Soluções dos limites de funções polinomiais pelo estudante A13



Fonte: Elaborado pelo pesquisador (2014)

Figura 24 – Soluções dos limites de funções polinomiais pelo estudante A19



Fonte: Elaborado pelo pesquisador (2014)

5.4.2 Limite de funções racionais

Durante a realização das atividades com a turma no projeto-piloto, na pesquisa definitiva e a partir das pesquisas já realizadas sobre limite de funções, verificamos que os estudantes apresentam certas dificuldades na resolução de limites de funções racionais (CORNU, 1991; HITT, PÁEZ, 2003; MURILLO, 2004; HITT, CORTÉS, 2005). Elas ficam mais evidentes especialmente quando propomos funções que apresentam alguma descontinuidade em determinado ponto, ou seja, a função não é definida especialmente no ponto em que se pretende calcular o limite (HITT; PÁEZ, 2003). Para identificar se o limite existe nesse tipo de função, os estudantes geralmente procuram verificar o domínio da função ou tentam fazer a substituição numérica do valor de x, na função, e verificam se encontram ou não uma indeterminação do tipo 0/0.

O que temos constatado é que utilizam, de maneira equivocada, o teorema sobre limites laterais e também a própria definição de limite de funções na resolução desses limites. Pensando nesse tipo de erro, elaboramos uma atividade em que eles deveriam fazer alguns cálculos, seguir uma sequência lógica de perguntas e concluir qual seria o limite de uma função (Ver questão 2 no Apêndice B). Esse mesmo formato de questão foi aplicado para os estudantes em outros dois momentos da pesquisa, na 7ª etapa e na prova final. Nessas duas últimas atividades, não apresentamos as etapas de solução como na atividade diagnóstica, deixamos o aluno livre para ele escolher a estratégia que considerasse melhor na resolução do limite.

Estamos considerando essas questões com características que exigem um nível de *compreensão relacional,* segundo Skemp (1976), pois, acreditamos que essa é uma tarefa em que ele é levado a pensar o que seria o limite de uma função, mesmo que de maneira intuitiva, devido à descontinuidade da função em um ponto. Dependendo da estratégia utilizada na resolução da questão, o aluno terá que saber a definição de limites laterais, domínio de funções racionais, então, podemos dizer que, nesse modelo de questão, precisa dominar e compreender um pouco da matemática superior.

Utilizamos representações algébricas e tabelas para a determinação do limite na questão aplicada na 2ª etapa de pesquisa. Nas outras duas, na 7ª etapa e na prova final, a resolução ficou a critério do aluno. As funções racionais apresentavam indeterminações do tipo 0/0, quando x tendia ao valor solicitado para se calcular o limite. Acreditamos que eles precisavam experimentar uma variedade de atividades que exigissem um maior esforço cognitivo na tentativa de compreender ou provocar uma imagem de um conceito (TALL, VINNER, 1981) qualquer em matemática.

Seguem, no Quadro 7, as questões sobre funções racionais que foram aplicadas nos três momentos, no início, no meio e no final do curso.

Quadro 7 – Limites de funções racionais

Questão	Etapa da pesquisa	Conhecimentos matemáticos necessários para resolução	Data
$\lim_{x\to 5}\left(\dfrac{x-5}{x^2-25}\right)$	2ª etapa	Noção de limite e suas propriedades; Limites laterais; Cálculo do valor da função num ponto; Simplificações algébricas; Fatorações algébricas; Cálculo de expressões numéricas com números reais.	10/3/14
$\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)$	7ª etapa	Noção de limite e suas propriedades; Limites laterais; Cálculo do valor da função num ponto; Simplificações algébricas; Fatorações algébricas; Cálculo de expressões numéricas com números reais.	30/6/14
$\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-9}{x-3}\right)$	Prova final	Noção de limite e suas propriedades; Limites laterais; Cálculo do valor da função num ponto; Simplificações algébricas; Fatorações algébricas; Cálculo de expressões numéricas com números reais.	09/7/14

Fonte: Elaborado pelo pesquisador (2014)

O enunciado da questão sobre funções racionais da 2ª etapa da pesquisa é diferente do enunciado das outras duas questões que foram aplicadas na 7ª etapa e prova final. Nessas duas questões, o aluno escolhia o método que ele considerasse ideal para solução das questões. No entanto, na 2ª etapa, o enunciado era mais direcionado, o estudante tinha que seguir os itens solicitados na questão para resolvê-la. A ideia de trazer esse tipo de questão foi o de tentar construir e/ou acessar uma imagem conceitual já existente (TALL, VINNER, 1981) do limite de uma função. Cremos, assim como Vaz (2010), que a utilização do pensamento aritmético pode trazer uma interpretação melhor da ideia intuitiva do limite de uma função, quando a variável livre tende a um determinado valor, mesmo que esses estudantes reflitam sobre o comportamento da função na vizinhança de um ponto.

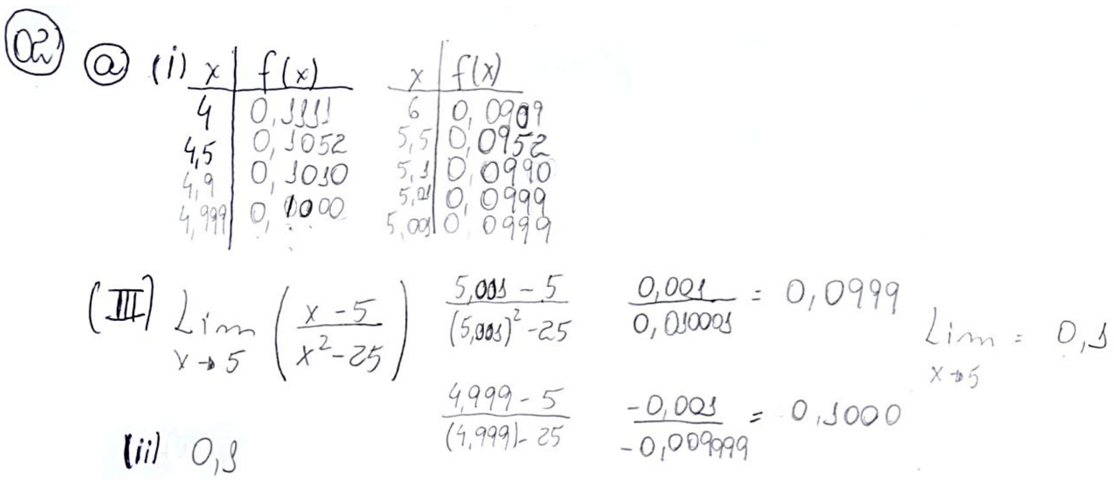
O enunciado da questão era: Para calcular o limite da função abaixo, faça o que se pede em cada item: i) Use uma calculadora para tabular, até *quatro casas decimais*, os valores de f(x) para os valores fixados de x; ii) Do que f(x) parece tender quando x se aproxima de c? iii) Encontre o $Lim_{x\to c} f(x)$. Sendo dados: $f(x)=\left(\dfrac{x-5}{x^2-25}\right)$ e c= 5 e x: (4; 4,5 ; 4,9 ; 4,999) e (6; 5,5 ; 5,1; 5,01; 5,001) e c = 5. Encontre $Lim_{x\to 5}\left(\dfrac{x-5}{x^2-25}\right)$

A função selecionada para essa questão aparece nos principais livros de Cálculo I, utilizados como referências bibliográficas da turma. O limite dessa função já havia sido aplicado em avaliações nos semestres anteriores, portanto, não era uma questão inédita para esses estudantes. Pretendia-se verificar se ele era capaz de relacionar os três itens (i, ii e iii) da questão, para concluir se o limite existia ou não, e qual era seu valor, mesmo que para x=5 essa função não esteja definida.

Analisando as respostas dos estudantes, encontramos os seguintes resultados:

i) Estudantes resolveram os valores numéricos assumidos pela função corretamente e encontraram o valor do limite correto igual a 0,1. Nesse caso tivemos os estudantes A4, A29, A28 e A13.

Figura 25 – Solução de limite de uma função racional pelo estudante A4

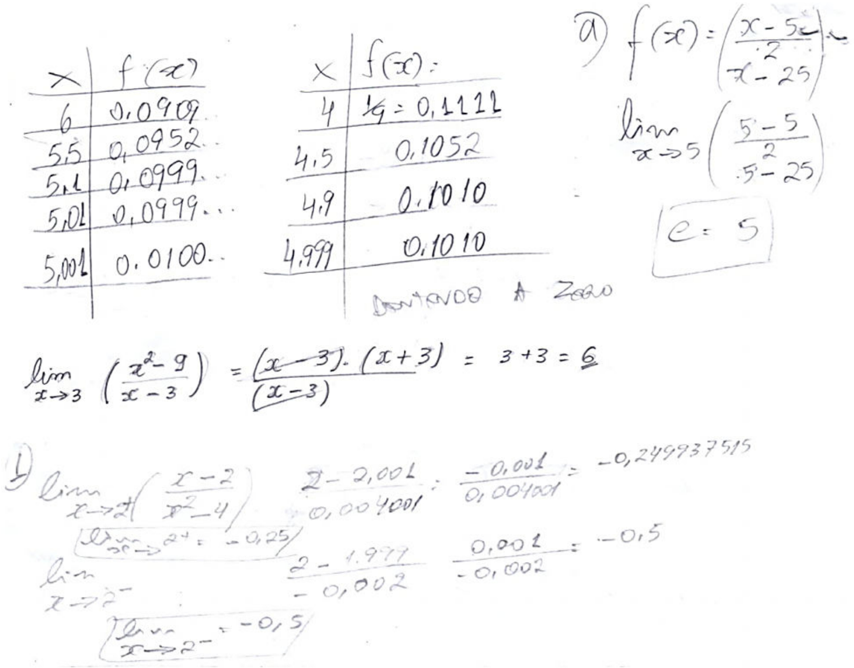


Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Nessa categoria, estavam os estudantes que, ao conseguirem relacionar os três itens da questão, pareciam demonstrar que estavam conseguindo construir uma imagem conceitual (TALL, VINNER, 1981) da definição dinâmica de limite de funções.

ii) Estudantes resolveram os valores numéricos assumidos pela função corretamente e encontraram o valor do limite errado, dizendo que seria *zero*. Nesse caso tivemos os estudantes A1, A3, A5, A15, A23, A24, A25, A27 e A30. E, dizendo errado que o valor do limite seria 1, temos os estudantes A6 e A16. Para verificar como os estudantes resolveram a questão e apontaram que o limite tenderia a zero, veja a resolução do estudante A1 (Figura 26).

Figura 26 – Solução sobre limites de funções racionais pelo estudante A1



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

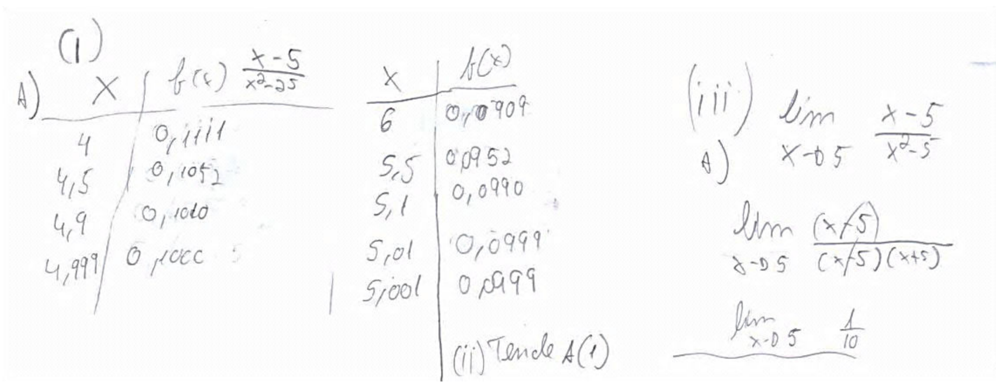
Para esses estudantes, existiam obstáculos epistemológicos de alguns conceitos do Cálculo que dificultavam a construção da imagem conceitual da definição dinâmica ("tender para" ou "se aproximar de") do limite de uma função. Dentre os obstáculos epistemológicos apontados por Cornu (1991) para a compreensão da definição de limite, nós nos arriscamos a dizer que a noção de infinitamente pequeno, quando os alunos necessitam utilizar a ideia de “aproximar de” um determinado número, pode ser um dos obstáculos que esses estudantes estivessem encontrando para conseguir compreender a ideia intuitiva de limite.

Os estudantes A1, A3, A5, A15, A23, A24, A25, A27 e A30 não conseguiram perceber que os valores 0,101010...; 0,10001...; 0,0999...; 0,09999..., tenderiam para 0,1. Entretanto, quando resolveram outro limite, nessa mesma atividade, em que os valores encontrados para a função foram 11,9401; 11,9994001; 12,06; 12,006; todos afirmaram que o limite da função tenderia a 12. Diante disso, nos questionamos: por que estudantes universitários afirmam com mais facilidade que valores como

11,9999... ou 12,0001... se aproximam de 12 e encontram dificuldades em entender que 0,09999... e 0,100001... se aproximam de 0,1? Cremos que essa dificuldade pode estar relacionada à ideia de que o limite atinge, ou não, determinado valor (CORNU, 1991; SIERPINSKA 1985), e isso gera dificuldades relacionadas a números reais, especialmente à ideia de números racionais, ou seja, a prevalência dos inteiros sobre os racionais.

Quanto aos estudantes que indicaram que o limite seria 1, estudantes A6 e A16, constatamos que as dificuldades eram semelhantes àquelas dos estudantes que indicaram que seria zero. Mas gostaríamos de destacar a partir da resolução do estudante A16, que alguns desses alunos não conseguiam fazer a relação entre os valores encontrados para o limite aritmeticamente, com os encontrados algebricamente. Isso parece nos indicar que, para eles, são dois limites diferentes.

Figura 27 – Solução de limites de funções racionais pelo estudante A16

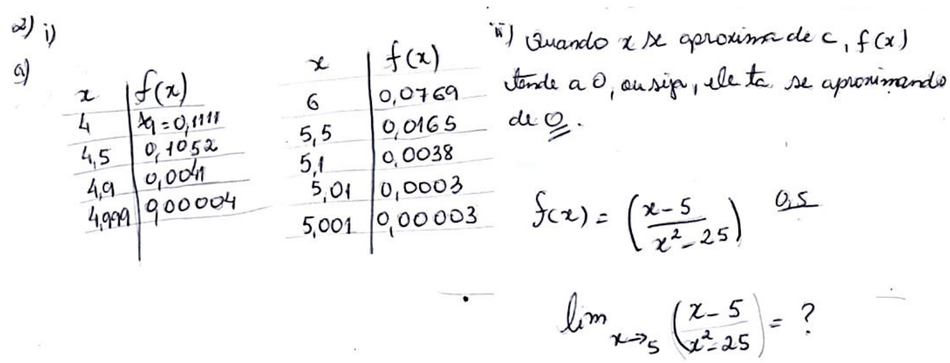


Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

iii) Estudantes resolveram os valores numéricos assumidos pela função de forma errada e encontraram o valor do limite errado. Aqui temos os estudantes A7 e A14.

É muito comum, na universidade, encontrarmos alunos que não conseguem manusear calculadoras científicas adequadamente. Se pensarmos dessa forma, talvez isso explique o erro do estudante A14. No entanto, se nós considerarmos que ele indicou o valor zero para o limite da função, nós verificamos que isto confere com os valores que ele encontrou para f(x). Assim, nós devemos nos questionar e refletir por que o estudante A14 encontrou valores errados? Possivelmente usou a calculadora. O mau uso desse instrumento tem levado muitos a encontrarem valores errados. Não podemos dizer que A14 não tivesse uma ideia intuitiva do que seria o limite de uma função. Sabemos que precisávamos valorizar seus esforços nesta questão, mas também deveríamos ressaltar que tinha cometido erros.

Figura 28 – Solução de limites de funções racionais pelo estudante A14



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Trazemos algumas análises das tarefas dos estudantes selecionados sobre limites de funções racionais ao longo da investigação. Notamos que as soluções deles, acertos e erros, assim como as estratégias utilizadas nas resoluções das questões foram semelhantes aos resultados apresentados pela turma. Nossas interpretações tiveram como foco: a) as estratégias utilizadas nas resoluções; e b) os tipos de erros.

As estratégias utilizadas pelos estudantes nas resoluções de limites de funções racionais são geralmente duas: i) utilizam a definição de limites laterais; ii) fazem uma simplificação algébrica da função, encontrando uma função equivalente, depois de remover essa descontinuidade, usam o mesmo procedimento para calcular o limite de uma função contínua equivalente. Fazem uma substituição numérica do valor de x na função, ou seja, calculam o $\lim_{x\to a} f(x)$, ao fazerem o cálculo do valor da função para x=a, encontrando f(a).

Verificamos que à medida que o aluno adquire uma maior segurança nos procedimentos algébricos para simplificar as funções racionais, parece que ele procura abandonar a estratégia de cálculo por meio da definição de limites laterais e aproximações numéricas. Podemos perceber isso nas resoluções de A1, A13 e A19 da questão $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-9}{x-3}\right)$ na prova final. Quando analisamos as suas resoluções em atividades anteriores, foi possível observar que a principal estratégia deles era resolver por aproximações aritméticas.

Analisando as respostas dos estudantes A1, A13 e A19 da questão $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)$, conseguimos constatar que: i) A1 optou pela estratégia de resolução das aproximações numéricas, usando a definição de limites laterais, atribuindo apenas dois valores para x, um tendendo a 2 pela esquerda e outro tendendo a 2 pela direita. Acertou o cálculo numérico para x=2,001 e errou o cálculo para x=1,999. Esses erros ocorreram devido ao uso incorreto das calculadoras.

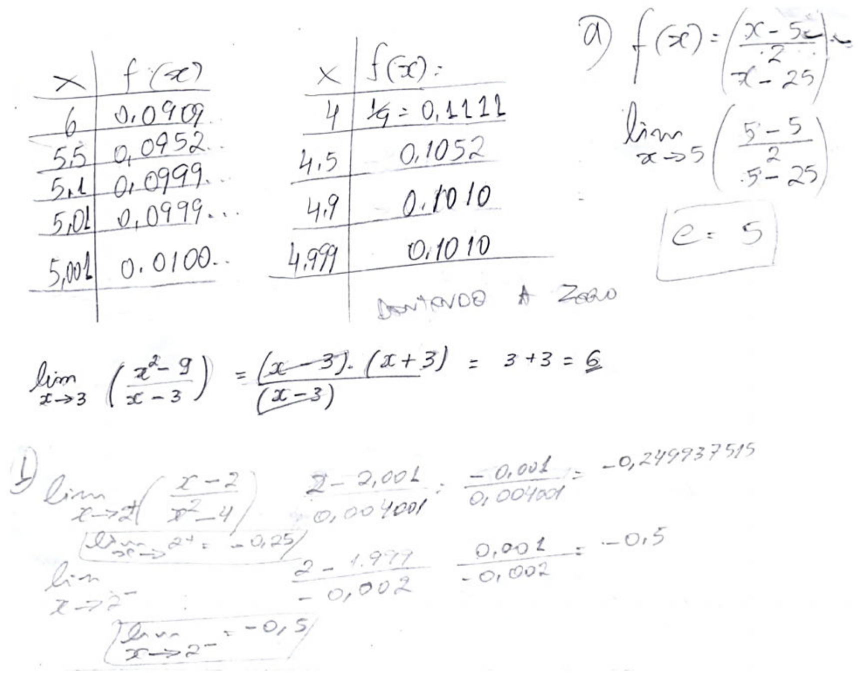
No entanto, o que gostaríamos de evidenciar é que, mesmo encontrando os valores corretos para os valores de x tendendo a $\mathbf{a^+}$ (lê-se: x tendendo ao valor de a pela direita) ou valores de x tendendo a $\mathbf{a^-}$ (lê-se: x tendendo ao valor de a pela esquerda), alguns não conseguiram definir o valor do limite da função. Algumas respostas apresentadas por eles ficaram inconclusivas por não considerarem qual o valor do limite da função, ou ainda por eles considerarem os dois valores encontrados como o limite da função. Podemos evidenciar esse argumento na resposta dos estudantes A1 e A19, quando eles indicaram dois valores para o limite da função, esquecendo-se de um conceito básico do conceito de limite, que é a sua unicidade. Esses foram erros considerados, por nós, como específicos de Cálculo.

Os estudantes A13 e A19 usaram duas estratégias na resolução da questão, as aproximações numéricas e a simplificação algébrica na tentativa de encontrar uma função equivalente para eliminar a descontinuidade da função no ponto x=2. Analisando a solução de A13, podemos verificar que ele conseguiu resolver corretamente a questão usando as aproximações numéricas e concluiu corretamente o valor do limite da função para x tendendo a 2, como sendo igual a 0,25; e assim pareceu demonstrar que domina a definição de limites laterais. Entretanto, quando analisamos a sua resolução algébrica, encontramos os seguintes erros: a) na fatoração do binômio x^2- 4, onde indica que a sua fatoração é 2.(x+2).(x-2); b) na simplificação da fração algébrica, obtendo f(x)=2(x+2), onde o correto seria encontrar $f(x)=\frac{1}{x+2}$. Esses erros são comuns e, para nós, são erros relacionados à álgebra do ensino fundamental. Erros desse tipo, referentes à álgebra elementar, também foram encontrados na pesquisa de Cury e Cassol (2004), na disciplina de Cálculo I, do curso de Engenharia Química, na resolução de limites de funções racionais.

Analisando as respostas de A19, quando utilizou a simplificação algébrica da função para a resolução do limite, percebemos erros semelhantes aos de A13. Ele fez corretamente as fatorações algébricas, mas errou na simplificação da fração algébrica, encontrando uma função equivalente f(x)=x+2, quando deveria encontrar $f(x) = \frac{1}{x+2}$. O importante, para nós, foi observar que alguns não fizeram a conexão/transposição entre o valor encontrado para o limite calculado por aproximações numéricas e o valor encontrado quando o limite era calculado por uma simplificação algébrica ou outro processo de resolução.

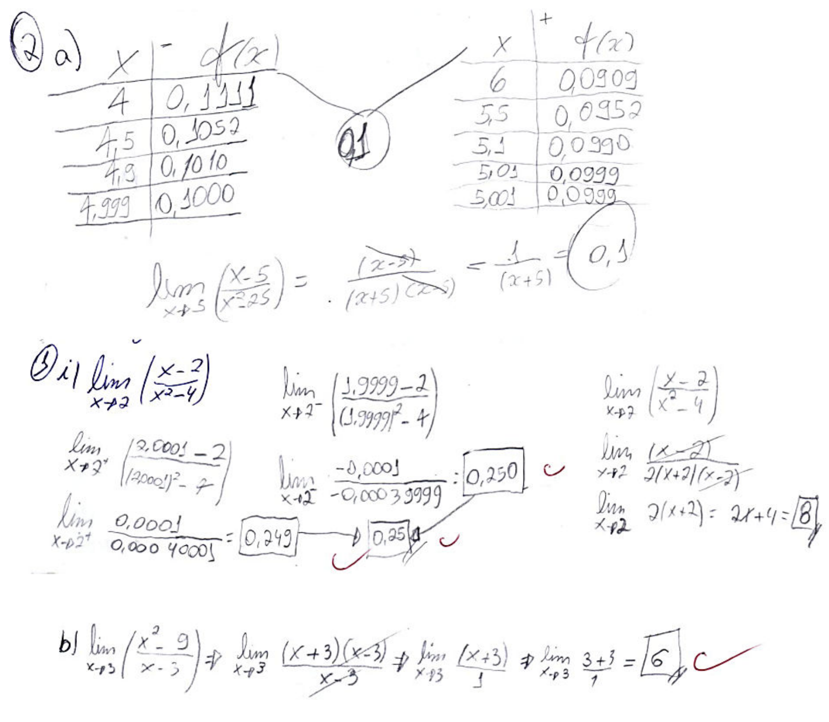
Para Cornu (1983), a aquisição do conceito de limite requer uma representação mental de imagens, desenhos, ligações que não são as mesmas para a aquisição da definição formal de limite. Portanto, os alunos precisam experimentar em tarefas as várias formas de representação de limite que são representação numérica, representação algébrica e representação gráfica.

Figura 29 – Solução sobre limites de funções racionais pelo estudante A1



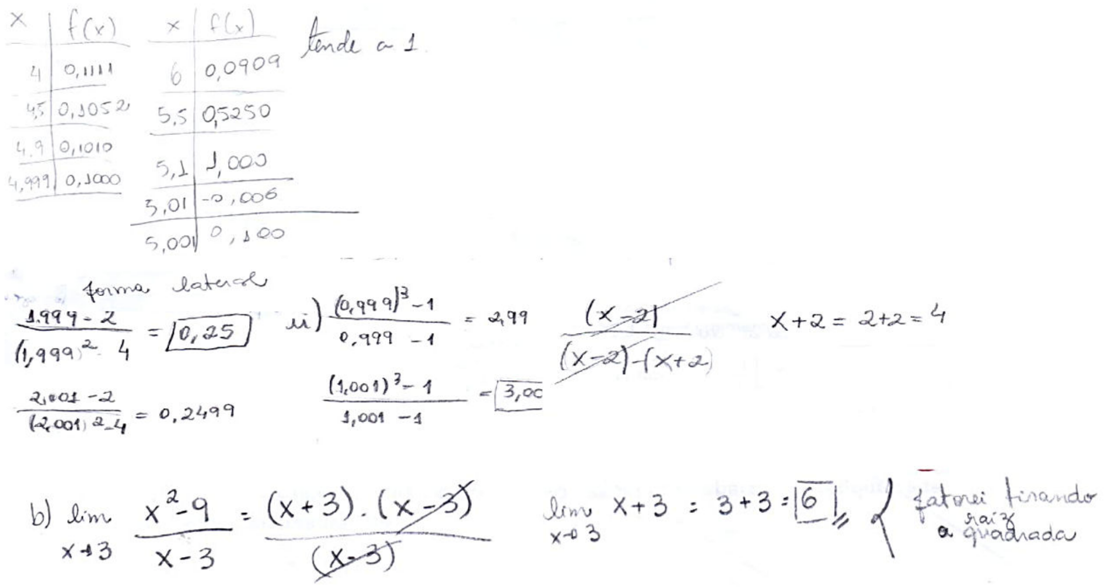
Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Figura 30 – Solução de limites de funções racionais pelo estudante A13



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Figura 31 – Solução de limites de funções racionais pelo estudante A19



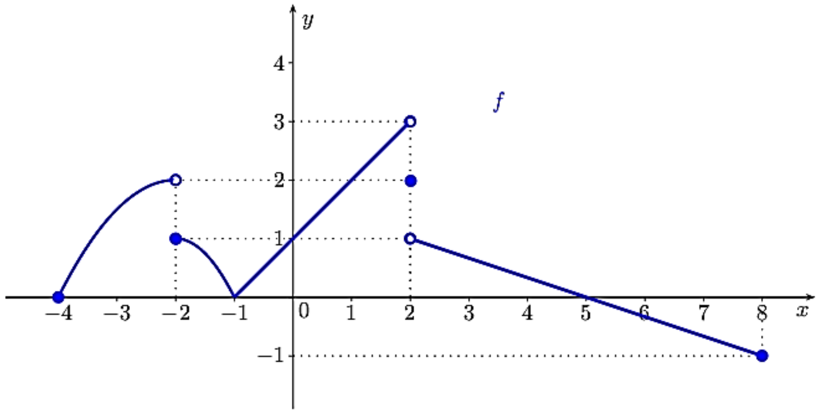
Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

5.4.3 Limite de funções a partir do seu gráfico

Determinar o valor do limite de uma função real de uma variável a partir do seu gráfico não é uma tarefa fácil (HITT; PAEZ, 2001, 2003). Essa atividade da pesquisa teve como objetivo analisar se os estudantes seriam capazes de determinar o limite de uma função real, a partir da leitura do seu gráfico. A questão foi aplicada para 17 deles durante nosso horário extra de estudo.

O enunciado da questão era: Para a função cujo gráfico é mostrado abaixo (Gráfico 2), identifique cada limite, se existir, e determine os valores das funções em cada ponto solicitado. Faremos uma análise dos seguintes limites em torno dos seguintes valores x=-2, x=-1 e x=2, ou seja, i) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$; ii) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$; $\lim_{x\to -2} f(x)$; $\lim_{x\to -1} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$. Escolhemos esses três pontos do gráfico para que os limites fossem calculados porque poderiam provocar nos estudantes alguns conflitos cognitivos em relação à definição de limite, ao valor da função num ponto e à própria ideia de continuidade ou descontinuidade de uma função.

Figura 32 – Cálculo do limite de uma função a partir do seu gráfico (7ª etapa 30/06/14)



Fonte: Acervo pessoal do pesquisador (2014)

Ao analisar as respostas da turma em relação ao $\lim_{x\to -2^{+}} f(x)$, constatamos que 14 acertaram o valor do limite, mas três erraram e responderam que o valor do limite seria -1. Numa tentativa de tentar compreender o erro, pareceu-nos que aqueles que erraram a questão tiveram dificuldade na interpretação do símbolo $x \to -2^{+}$. Essa dificuldade de compreender que o sinal "+" indicava um limite lateral à direita também foi apontada pela pesquisa de Cury e Cassol (2004).

No cálculo do $\lim_{x\to -2^{-}} f(x)$, verificamos que apenas um acertou e dezesseis erraram. Desses, dez indicaram que o valor do limite seria o valor 1, dois, responderam que o limite não existia, dois, que o valor era -4 e dois, que seria -1. Acreditamos que dez responderam que o limite seria 1, porque encontraram em seus cálculos que f(-2)=1. Isso está de acordo com os comentários de Hitt e Murillo (2005), pois, segundo esses autores, o estudante considera que, graficamente, o valor do limite é sempre onde a função está definida. Já os que responderam que o limite seria -1, podemos pensar que talvez pudessem ser justificados ou compreendidos pelo argumento de Murillo (2004) de que, ao invés de procurarem uma vizinhança no contradomínio da função, procuraram encontrar a vizinhança no domínio como argumenta Murillo (2004).

Dois estudantes responderam que o limite não existia. Provavelmente eles estivessem usando a definição de limites bilaterais, em vez de considerar somente valores à esquerda de -2. O erro cometido pelos estudantes que responderam que seria -4 pode ter sido gerado por uma dificuldade de compreensão da relação entre valores x do domínio e suas respectivas imagens na função.

No cálculo do $\lim_{x \to -2} f(x)$, todos erraram. A princípio, o que podemos inferir é que, provavelmente, eles não entenderam a definição de limites laterais, ou porque não conseguiram relacionar os limites encontrados nos itens (i) e (ii). O que nos chamou a atenção foi que 13 responderam que o valor do limite seria 1, confirmando a tese de Hitt e Murillo (2005) de que o estudante considera que, graficamente, o valor do limite é sempre onde a função está definida. Dois afirmaram que o valor do limite era -2. Aqui temos novamente a hipótese, feita por Murillo (2004) de que, ao invés de procurarem uma vizinhança no contradomínio da função, procuraram fazer essa busca em uma vizinhança do domínio. Os outros dois estudantes responderam que seria o valor 2, e acreditamos que esses alunos apenas tenham usado o limite tendendo a -2 pela esquerda como resposta.

Na resolução do $\lim_{x \to -1} f(x)$, sete acertaram o valor do limite. Dos 10 que erraram, 6 responderam que o valor do limite seria -1. Esse erro, justificamos com os argumentos de Murillo (2004) da troca dos valores nos eixos coordenados no cálculo do valor do limite de uma função a partir do gráfico. Quatro responderam que o limite não existia, e temos, como hipótese, que isso ocorreu devido ao fato de que o valor f(1)=0. Talvez tenham associado o valor zero com a não existência do limite.

Quando analisamos as soluções de $\lim_{x \to 2} f(x)$, verificamos que apenas um acertou, quatorze responderam que seria 2, um respondeu que seria 1, e um respondeu que esse limite teria dois valores como resposta, que seriam 1 e 3. O erro dos alunos que responderam para o limite solicitado o valor 2 pode talvez ser justificado pelo fato de acreditarem que o valor do limite da função é sempre onde ela está definida. Parece-nos que essa ideia é reflexo de uma forte influência do processo de substituição numérica que fazemos no cálculo de limites. Segundo Hitt e Murillo (2005, p. 126), alguns estudantes têm *uma concepção errônea de que calcular o limite é localizar um ponto (a, f(a)) e consideram que o limite é o valor numérico, onde a imagem é definida, ou seja, o limite é o valor da ordenada do ponto (a, f(a))*. Essa concepção é resultado da influência de considerar o limite como simplesmente um processo de substituição de valores numéricos que transcende à representação geométrica.

5.4.4 Conceito de limite de funções dos estudantes

O ensino do conceito de limite de funções, adotado nos primeiros anos de algumas universidades, tem priorizado às vezes os aspectos mecânicos na resolução de infinitas listas de exercícios semelhantes aos exemplos feitos em aula e explicados também de forma breve e superficial. Segundo Cornu (1991, p. 153), diferentes investigações realizadas mostram muito claramente *que a maioria dos estudantes não domina a ideia de limite, mesmo em um estágio mais avançado dos seus estudos*. Isso não os impede de conseguirem resolver exercícios e problemas, e assim conseguirem ter sucesso em seus exames, porque muitas vezes as provas trazem itens semelhantes aos trabalhados em aulas e em exercícios e que exigem apenas cálculos e procedimentos decorados e instrumentais (SKEMP, 1976).

Realizamos, em julho de 2015, uma entrevista (Apêndice H) com sujeitos selecionados da pesquisa. O nosso objetivo era descobrir, vários meses depois do término da pesquisa na turma deles, se eles compreenderam a noção de limite de funções ou qual imagem do conceito de limite que conseguiram formar. Os estudantes A1 e A13 cursaram a disciplina de Cálculo II, em 2015/1, e o estudante A19 ainda não cursou essa outra disciplina.

Em nossa investigação, optamos em não trabalhar com a definição de épsilon-delta de limite, que denominamos de definição formal. Optamos por uma definição intuitiva e dinâmica de limite. De maneira geral, utilizamos, em nossas aulas e em nossas explicações a seguinte notação para definir limite de função:

> Suponha que f(x) seja definida quando x está próximo ao número a. Portanto, significa que f(x) é definida em algum intervalo aberto que contenha a, exceto, possivelmente, no próprio ponto **a**. Então, definimos: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e dizemos que o "limite de f(x), quando x tende a **a**, é igual a L" se pudermos tornar os valores de f(x) arbitrariamente próximos de L (tão próximo de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a **a**. (STEWART, 2013, p. 81).

Resumidamente, em outras palavras podemos dizer que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, significa: os valores de f(x) tendem a ficar cada vez mais próximos do número L, à medida que x se aproxima de a, tanto pela direita, quanto pela esquerda de a, mas não necessariamente em x=a, ou seja, em x≠a. Não é necessário que f(x) esteja definida em x=a, mas a única coisa que importa é como f(x) está definida para valores próximos de a.

Nas entrevistas (Ver Anexo H) realizadas com os três estudantes foi possível observar outras informações, além das coletadas durante o 1º semestre de 2014, quando realizamos a pesquisa de campo. Entrevistamos A1 no dia 03/7/15, A19 no dia 05/7/15 e A13 no dia 08/7/15, com o objetivo de verificar se conseguiram internalizar uma imagem conceitual (TALL, VINNER, 1981) da noção intuitiva de limite. Propusemos, em nossa entrevista, para cada estudante, as seguintes perguntas:

a) O que é, para você, o limite de uma função?

b) O que significa a expressão $\lim_{x\to a} f(x) = L$?

Acreditamos que essas duas perguntas se complementam para a construção do conceito de limite de função. Segundo Tall e Vinner (1981), geralmente, nesse processo de construção do conceito é dado um símbolo ou um nome que permite que ele seja comunicado, e isso auxilia na manipulação mental. Seguem as respostas desses estudantes e nossas interpretações.

Resposta do estudante A1:

Esse limite não tem que ser exatamente um valor. Para mim, quando x se aproxima de a, a função se aproxima de L.

Resposta do estudante A13:

Que o limite é um valor que chegaria próximo de a, mas não seria o valor de a. Então significa que, quando x se aproxima lateralmente de um valor a, o valor da função se aproxima de L.

Resposta do estudante A19

*O limite de f(x), quando x tende a **a**, significa se você substituir x=a nessa função, você encontra L. Podemos fazer o valor de x se aproximar de a cada vez mais, e as imagens desses valores de x se aproximarão de L, tanto quanto você queira, só fazer o x se aproximar mais de a.*

A partir da análise das respostas desses estudantes, vamos dividi-las em duas categorias. Os dois primeiros nos parecem trazer uma noção intuitiva de limite dentro do ponto de vista histórico, que seria a definição de D'Alembert (REZENDE, 1994, p.148), em que a variável é um conceito dinâmico que, em hipótese alguma, atinge o seu valor limite, "*ela **tende** a esse valor*" (grifo do autor). Levando em consideração que não fizeram nenhum tipo de consulta a livros e que eles não faziam nenhuma ideia do que iríamos perguntar, podemos ainda observar que traziam elementos de uma definição de limite de função. Embora nos parecesse ao escutar e ler o que disseram uma definição um pouco distorcida, mas com argumentos próximos da definição que utilizamos em sala de aula.

Na segunda categoria de resposta temos a fala de A19, cuja definição gostaríamos de destacar dois pontos que, de certo modo, são contraditórios. O primeiro, é que ela começa com uma definição de limite como algo operatório e bem instrumental (SKEMP, 1976), ou seja, o limite de uma função é só substituir o valor de x na função e calcular. Em contrapartida, ela traz na segunda parte de sua definição um detalhe, que nos chamou a atenção. Não podemos afirmar se esse *insight* (TALL, VINNER, 1981) na sua definição foi de maneira consciente ou inconsciente, quando ela define que *o valor de x se aproxima a cada vez mais e as imagens desses valores de x se aproximarem de L, tanto quanto você queira, só fazer o **x** se aproximar mais de a.* Essa frase, que destacamos na definição do limite de uma função da estudante A19, é exatamente a ideia intuitiva dos épsilons e deltas da definição formal de limite e pode ser que ela tenha iniciado a compreender este conceito intuitivo de limite.

Para nós, professores, esse tipo de resposta está nos mostrando que existe potencial de aprendizagem no diálogo com argumentos e contra-argumentos de professor e estudantes. Se nós soubermos aproveitar o potencial de nossos alunos e criarmos situações em sala de aula, deixando que exponham e defendam mais suas ideias e conceitos aprendidos, ou ainda em construção, possibilidades concretas de aprendizagem e de esclarecimentos de dúvidas surgem ou podem surgir. Por que não arriscarmos dizer que é possível, sim, que eles construam uma imagem do conceito e a definição do conceito do limite de funções. Mas, aqui, colocamos, como desafios, a necessidade de planejarmos aulas, listas de exercícios e provas que envolvam tarefas operatórias e conceituais diferentes das que usamos na rotina das aulas de Cálculo I em cursos universitários de serviço. Nossa pesquisa de doutorado nos colocou este desafio e atualmente, em 2016, ministrando aulas de Cálculo I para estudantes repetentes no IFES, campus de Itapina estamos procurando ter essa postura diferenciada em nossas aulas.

6 CONCLUSÕES E REFLEXÕES FINAIS

Iniciamos nossa pesquisa descrevendo a necessidade de compreender o *insucesso* dos estudantes universitários que repetem a disciplina de Cálculo I, por duas ou mais vezes, e trouxemos dados de pesquisas sobre o alto índice de reprovação em Cálculo. Pensamos, então, por que não iniciar nossas conclusões mostrando os resultados positivos alcançados pelos estudantes repetentes na disciplina de Cálculo I, no IFES- Campus Itapina, no semestre 2014/1? Como disse a estudante A19, em sua entrevista, no dia 5/7/15, "*Na primeira vez que cursei a disciplina de Cálculo I [2013/2], bateu um desespero nas primeiras semanas do curso, quando não estava entendendo nada. Nossa! Vou fazer parte das estatísticas de reprovação em Cálculo*". Agora podemos dizer que muitos desses estudantes, que se sentiam incapazes de serem aprovados, fazem parte das estatísticas dos que foram aprovados nesse componente curricular em 2014.

Dos trinta e oito estudantes repetentes que começaram o curso, vinte e cinco estudantes (aproximadamente 65%) foram aprovados; cinco (aproximadamente 13%) desistiram nas primeiras semanas; três (aproximadamente 8%) estavam matriculados, mas que não compareceram a nenhuma aula; e cinco (aproximadamente 13%) alunos, que frequentaram o curso até o final e ficaram reprovados. Esperamos conseguir trazer, neste relatório final, um pouco do quanto aprendemos com essa turma "*especial*",[40] formada exclusivamente com estudantes repetentes. Precisamos destacar quanto os vinte e cinco estudantes aprovados se esforçaram para conseguir mais esse pequeno sucesso na vida acadêmica deles. No entanto, sabemos que muitos sentimentos, conversas e reflexões que fizemos em vários momentos dentro e fora da sala de aula não poderão aparecer neste texto, pela limitação que temos de espaço, ou porque alguns desses sentimentos não podem ser descritos em palavras.

---

[40] Colocamos esse termo *"especial"* entre aspas porque uma aluna nos questionou: "professor, por que nós somos uma turma especial?" Na época percebemos que ela estava se sentindo inferiorizada por se tratar de uma turma formada exclusivamente por estudantes repetentes. Explicamos que tínhamos usado esse termo, devido ao fato de ser uma turma extra com um horário especial no contra turno das aulas do curso.

Em nossa pesquisa, consideramos e analisamos cinco componentes que fazem parte do processo de ensino-aprendizagem, por acreditarmos que todos estejam interligados e que existem interferências de uns nos outros. Os componentes foram: (1) matemática emocional (crenças, concepções e atitudes) em relação a professor e alunos; (2) relação professor/aluno e aluno/aluno; (3) dificuldades conceituais inerentes aos conteúdos específicos de Cálculo; (4) tipos de tarefas que desenvolvemos sobre limites de funções; e (5) análise de acertos e erros das tarefas realizadas pelos estudantes.

Primeiramente, foi fundamental, para nossa pesquisa, considerarmos os fatores emocionais e afetivos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem. Dizemos isso especialmente por se tratar de uma turma com estudantes repetentes, que traziam suas crenças ou “verdades” pessoais incontestáveis que cada um tinha sobre a disciplina de Cálculo I. Assim, promovemos reflexões com as pessoas envolvidas, professores/alunos e alunos/alunos, e procuramos conhecer melhor quem eram esses estudantes, suas expectativas de aprendizagem e dificuldades de aprendizagem na disciplina de Cálculo I.

Nossa tentativa de apostar que os fatores emocionais poderiam influenciar no desempenho acadêmico desses estudantes repetentes surgiu a partir da nossa experiência no mestrado (ROCHA, 2009), quando realizamos uma pesquisa com atividades investigativas, em uma turma de ensino médio. Nela, concluímos que uma prática diferenciada, em que o professor levasse em consideração os fatores emocionais (crenças, concepções e atitudes) em relação à matemática e ao ensino dela, poderia influenciar as concepções dos estudantes em relação à disciplina. Esse nosso olhar, mais humano e diferenciado, foi uma das características de nossa investigação que a diferenciou de outros trabalhos que pesquisaram o desempenho dos estudantes universitários na disciplina de Cálculo.

O segundo componente do processo de ensino que passamos a considerar foi a dificuldade de aprendizagem dos conteúdos da disciplina de Cálculo I relacionada com a falta de base dos conteúdos da matemática básica e as dificuldades epistemológicas de alguns conceitos específicos de Cálculo. Nesse sentido, um aspecto importante da nossa pesquisa foi tentar compreender a origem desses erros. Acreditamos que a análise de erros nos ajudou a compreender tanto alguns conteúdos da matemática básica quanto alguns específicos da disciplina de Cálculo I. Passamos a considerar, em nossas aulas, acertos e erros e, assim, utilizamos as respostas corretas, incompletas ou erradas dos alunos como “trampolim para a aprendizagem” (BORASI, 1985, p. 32). Verificamos que alguns erros aconteciam pela complexidade dos conceitos envolvidos, sobretudo nos conteúdos de Cálculo, pois a matemática no ensino superior assume um papel diferente da do ensino fundamental.

Trazemos algumas respostas aos nossos questionamentos sobre quais são os principais motivos ou causas que levam os estudantes repetentes à reprovação e/ou abandono da disciplina de Cálculo I. Queríamos, ainda, compreender os erros que estudantes repetentes cometem ao resolverem tarefas de limites. Sendo assim, resolvemos dividir as respostas aos nossos questionamentos em dois blocos. Com as respostas do primeiro bloco de perguntas, tínhamos, como objetivo, compreender quem eram esses estudantes, ou seja, passamos a direcionar nosso olhar para nosso aluno, para além do número de matrícula que tínhamos na pauta.

A) *Quem são esses estudantes repetentes? Quais são suas expectativas de desempenho na disciplina de Cálculo I quando repetem essa disciplina? Quais foram os principais motivos que os levaram a ficar reprovados em Cálculo I e/ou a abandonar a disciplina nas primeiras semanas do curso? O que pensam e acreditam que podem aprender de Cálculo I como estudantes repetentes?*

A turma era formada exclusivamente por estudantes repetentes que demonstravam muita dificuldade em matemática. Tinham dificuldade em conteúdos de matemática básica, por exemplo, em simplificações algébricas. Também exibiam dificuldades de entender conceitos básicos de Cálculo, como, por exemplo, compreender a unicidade de um limite. Nas primeiras semanas de curso, foi possível perceber que alguns estudantes estavam desanimados e desmotivados, uma vez que eles participavam pouco das aulas. Eles quase não respondiam aos nossos questionamentos e faltavam muito às aulas extras para reforço.

Procuramos, inicialmente, fazer com que esses estudantes refletissem sobre a importância do papel ativo que eles deveriam assumir para o seu bom desempenho nessa disciplina. Depois de certo tempo de caminhada da pesquisa, verificamos um maior comprometimento desses estudantes, especialmente com relação aos horários extras para reforço. Foi a partir de pequenas mudanças como essa que começamos a acreditar que muitos universitários conseguiriam sucesso. A maior parte não tinha hábitos de estudo e tinha atitudes passivas em aulas. Ademais, parece que eles gostavam de um modelo de aula em que o professor resolvesse todos os exercícios no quadro, porque achavam que esse seria o melhor caminho para que a aprendizagem deles acontecesse. Nas aulas, interagiam em pequenos grupos, que não se socializavam entre si.

Quando analisamos as informações sobre os hábitos de estudos, um item nos chamou a atenção. Nenhum estudante disse que estudava um tempo maior do que eles acreditavam que seria suficiente para o sucesso na disciplina de Cálculo I. Pronto, achamos o responsável pelo fracasso deles em Cálculo, a falta de hábitos de estudos. Será que é assim simples colocar a culpa pelo fracasso dos estudantes apenas nisto? Mas, sabemos que esse talvez seja apenas um dos fatores e que nós também deveríamos refletir e questionar a respeito de nossos procedimentos de ensino e de avaliação nessa disciplina. Mas o importante é que conseguimos durante a pesquisa de doutorado que os estudantes passassem a refletir sobre o envolvimento deles no processo de aprendizagem, seus hábitos de estudos e tempo de estudos.

Passamos a cobrar deles uma participação nas aulas de reforço extraclasse e um comprometimento maior com os estudos. Acreditamos que isso fez toda a diferença, pois tivemos relatos de estudantes que passaram a criar várias estratégias diferentes de estudo, que antes eles não utilizavam. Podemos citar, como exemplo, a estratégia utilizada pelo estudante A1, que nos relatou, em entrevista em julho de 2015 (Apêndice H), que passou a anotar em um quadro improvisado, em sua residência, as questões que ele não conseguia resolver quando estava fazendo as listas de exercícios ou mesmo as questões que ele mais errava nas avaliações e testes. Dessa maneira, ele procurava refletir sobre seus erros e quais seriam os caminhos que ele precisava trilhar para superar suas dificuldades e aprender a resolver essas questões.

Portanto, concluímos que identificamos que o discurso e a prática dos estudantes eram divergentes em relação aos hábitos de estudo. Eles foram tomando consciência dessa contradição e aprendendo a mudar os hábitos de estudo e o tempo dedicado ao estudo durante o semestre. Os estudantes constataram desde as primeiras semanas de aula que nós tínhamos interesse de que eles aprendessem e confiávamos que eles iriam aos poucos mudando suas atitudes em sala de aula. Nossas ações e discursos nas aulas regulares e nas aulas extras foram dando evidências aos alunos de que acreditávamos no potencial deles de aprender conceitos de Cálculo. Assim, os estudantes passaram a participar ativamente nas tarefas, alteraram hábitos de estudos e talvez eles tenham revisto e refletido e/ou pensado no comentário no primeiro dia de aula “esse cara de novo”.

Quais as expectativas de desempenho dos estudantes na disciplina de Cálculo I quando repetem essa disciplina?

Constatamos que 13 estudantes sinalizaram, de forma positiva, o seu desempenho em matemática nas séries anteriores no ensino fundamental e no médio. Os demais acreditavam que tinham piorado o seu desempenho ou mantiveram um desempenho fraco na universidade, porque eles sempre foram ruins em matemática. Acreditamos como Santos (1997), Gómez Chacón (2003), e Rocha (2009), que as crenças sobre a aprendizagem de matemática dos estudantes desempenham papel importante em termos de motivação. Com as informações que coletamos sobre as expectativas da turma sobre o sucesso, verificamos que quase 80% dos estudantes da turma acreditavam que, dessa vez, seriam aprovados e apenas um pouco mais de 10% acreditavam que não seriam aprovados.

Logo, estávamos com uma turma que acreditava em seu sucesso. Relacionamos as expectativas de aprendizagem dos alunos e os aspectos emocionais e cognitivos tais como crenças, concepções e atitudes em relação à disciplina de Cálculo I. Percebemos, então, que tivemos que alterar nossa postura de professor universitário, rompendo com nossas práticas pedagógicas distantes da realidade vivida pelo estudante. Acreditamos que, com essa mudança de comportamento, foi possível motivá-los e levá-los a acreditar que poderiam superar obstáculos e limitações de aprendizagem.

Quais foram os principais motivos que os levaram a ficar reprovados em Cálculo I e/ou a abandonar a disciplina nas primeiras semanas do curso?

As concepções de alguns estudantes sobre o próprio fracasso, na disciplina de Cálculo I, estavam relacionadas à deficiência de conteúdos da matemática básica. Sendo assim, passamos a revisar tais conteúdos em paralelo com os de Cálculo I, não de forma isolada, como nós fazíamos antes, no início de cada semestre. Esse trabalho integrado de conceitos matemáticos nos auxiliou a compreender e analisar erros dos estudantes repetentes. Ademais, essa nossa forma diferenciada de revisar conteúdos matemáticos anteriores em paralelo com o estudo de conceitos de Cálculo I, permitiu que os estudantes entendessem melhor onde usar alguns conceitos de matemática básica em tarefas de matemática no ensino superior. Outro motivo, apontado por eles, que favoreceu o fracasso deles na disciplina de Cálculo I era a forma como o professor explicava os conteúdos, a metodologia e a forma como avaliava.

Não podemos deixar de sinalizar que acreditamos que o papel que a matemática passa a assumir na graduação influencia bastante o desempenho dos estudantes universitários. No ensino básico, os professores apresentam os conceitos de matemática de forma mais concreta e todo o ritual de aulas é diferente. Já no ensino superior, eles passam a trabalhar com conceitos mais abstratos e esperam que os estudantes sejam mais independentes e que tenham boa base de conceitos matemáticos estudados anteriormente. Os universitários se surpreendem em disciplinas que exigem a construção e compreensão de conceitos matemáticos mais abstratos, características que aparecem, principalmente, nos conceitos matemáticos estudados em Cálculo I. Toda esta ruptura de estilo de aula de matemática e de conceitos estudados no ensino superior acaba por ocasionar vários obstáculos cognitivos e epistemológicos quando tentam aprender esses conceitos abstratos como acontece nas aulas de Cálculo I.

Constatamos, também, que alguns apontavam que o fato de tirarem uma nota baixa na primeira avaliação já era um motivo para que eles abandonassem a disciplina, especialmente se o professor atribuísse um peso muito alto na média final para essa primeira avaliação. Gostaríamos de tecer o seguinte comentário: o simples fato de tirar uma nota baixa na primeira avaliação pode ser, para alguns alunos, um motivo para a desistência, mas em contrapartida, existem estudantes que se sentem desafiados ao fracassar. Para alguns esse insucesso passa a ser uma motivação para estudar mais e superar suas dificuldades. Portanto, dizermos que um aluno abandonou a disciplina, tomando como referência uma única nota, não seria algo que poderíamos colocar como prioritário pela sua desistência, mas essa posição precisou ser revista e repensada por esses estudantes, e também, por nós, professores universitários.

O que pensam e acreditam que podem aprender de Cálculo I como estudantes repetentes?

Quando questionamos os estudantes sobre qual conteúdo eles acreditavam que aprenderiam no semestre, as respostas da turma ficaram divididas em torno de dois conteúdos: funções e limites. Acreditamos que essa turma conseguiu aprofundar seus estudos em funções e em cálculos de limites básicos de funções polinomiais e racionais. Conseguimos avançar até o conteúdo de aplicações de derivada quando ainda faltavam quatro semanas para o término do semestre. Isso não ocorria nos semestres anteriores, quando o conteúdo de derivada ficava sempre para o final. Nossas afirmações tiveram como base as avaliações, testes, os atendimentos no horário extra turno de reforço e as informações contidas nos instrumentos de coleta de dados durante todo o primeiro semestre de 2014.

Apresentamos, a seguir, algumas respostas dos nossos questionamentos sobre análise de erros e dificuldades epistemológicas do conceito de limite de funções.

B) Que dificuldades estudantes repetentes têm ao resolver tarefas de limite? Afinal quais são os erros que eles cometem ao resolverem limites de funções? São erros referentes aos conteúdos da matemática básica, ou erros específicos de Cálculo?

Inicialmente, vamos responder ao primeiro questionamento: *Que dificuldades estudantes repetentes têm ao resolver tarefas de limite?*

Em nossas atividades, avaliações e testes, tivemos, como foco, o cálculo dos limites de funções polinomiais e funções racionais. Aplicamos atividades sobre essas funções reais desde a atividade diagnóstica (Apêndice B) até a prova final (Apêndice F). Os erros cometidos por eles foram semelhantes durante todas as fases da pesquisa. As principais dificuldades foram com relação a lapsos na escrita, erros operatórios e de conceitos de Cálculo como propriedades dos limites, definição de função contínua e utilização de maneira equivocada da definição de limites laterais.

Nos momentos em que tentamos desconstruir alguns conceitos errados nem todos queriam mudar suas atitudes quando resolviam exercícios ou itens de provas. Por exemplo, usar a ideia de limite como uma simples substituição. Parece que alguns não queriam incorporar novos conceitos, nem outras formas de pensar e resolver as tarefas. Eles optavam em aceitar a ideia de limite de uma função quando x tende ao valor a, como sendo apenas uma simples substituição numérica em x = a, sem considerar se a função era ou não contínua no valor a, onde efetuaram o cálculo do limite. No cálculo do limite de uma função, a partir do seu gráfico, consideravam que, graficamente, o limite era o ponto onde a função estava definida. Esse tipo de concepção parece ter uma forte influência da imagem do conceito de limite que eles construíram nos diferentes semestres em que estudaram Cálculo I como uma simples substituição.

Em nossa pesquisa, assim com no trabalho de Murillo (2004), observamos estudantes com uma imagem conceitual de limite ou concepção de limite que associa a ideia de limite com o simples cálculo algébrico e/ou substituição de valores numéricos na função dada. Quando um estudante tem essa imagem ou concepção incompleta e equivocada de limite, ele pensa que calcular o limite de uma função real quando x tende a um valor determinado ($\lim_{x \to a} f(x) = L$) como sendo a simples substituição deste valor na função dada, ou seja, ele responde que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Em nenhum momento esse estudante pensa em analisar o domínio da função, em questionar se a função é ou não contínua, se ele sabe ou não esboçar o gráfico da função, etc. Não há uma análise do estudante do comportamento da função na vizinhança que contém o ponto, uma concepção que conduz a uma resposta correta, quando a função é contínua, mas, caso contrário, leva a uma resposta errada. Isto é, quando um estudante possui essa imagem conceitual ou concepção de limite apenas como substituição numérica de procedimentos algébricos, parece que ele trabalha em um nível puramente procedimental como comentaria Skemp (1976) e fica sem evidenciar que possui qualquer entendimento relacional dos conceitos matemáticos envolvidos.

No entanto, temos consciência da nossa responsabilidade, ou, por que, não dizer, culpa, nesses tipos de equívocos ou dificuldades apresentadas. Não era de costume em nossas aulas, por exemplo, exigir dos alunos a aplicação correta das propriedades dos limites no momento em que estavam calculando determinado limite. E eles insistiam em, simplesmente, fazer substituição direta da variável x para o cálculo de alguns limites de funções. E ao procurarmos rever e relembrar nossa forma de expor e resolver tarefas de limites nas aulas precisamos admitir que fomos responsáveis. Nós recordamos que nem destacávamos as propriedades de limites nem fazíamos questionamentos a respeito da função ser definida no domínio ou ser contínua no valor de x onde era solicitado o cálculo de limite. Passamos a rever e refletir acerca de nossa forma de expor e resolver tarefas de limites já nas etapas finais da pesquisa de campo e ampliamos nossas reflexões nos diversos momentos de análise dos dados.

Notamos, ainda, que alguns estudantes demonstravam muita dificuldade em relação a alguns conteúdos fundamentais de um curso inicial de Cálculo, por exemplo, a unicidade do limite, definição de limites laterais, e continuidade de função. Enfim, em reflexões posteriores, nos momentos em que analisávamos os dados da pesquisa e em reflexões com a nossa orientadora, muitos questionamentos apareceram em nossas mentes. Tivemos que aceitar que procuramos mudar a postura de aula e alguns procedimentos de ensino. Por exemplo, promovemos em nossas aulas momentos de explicações, e discussões de exercícios no horário de reforço, e procuramos conhecer melhor nossos estudantes. Mas não tínhamos destacado em aulas aspectos conceituais importantes dos conceitos matemáticos de Cálculo I e trabalhamos em alguns momentos de forma instrumental, como comenta Skemp

(1976). Com relação aos erros operatórios e de escrita acreditávamos que seriam dificuldades que os estudantes poderiam superar sozinhos.

Afinal, quais são os erros que eles cometem ao resolverem limites de funções? São erros referentes aos conteúdos da matemática básica, ou erros específicos de Cálculo?

Consideramos os seguintes erros como sendo da matemática básica:

a) Erros operatórios, quando o estudante tinha dificuldade de calcular o valor da função no ponto, errando operações com números reais. Exemplos: Ver Figuras 11 (pág. 160) e 12 (pág. 161).
b) Erros de simplificações e fatorações algébricas. Exemplos: Ver Figuras 26 (pág. 179) e 27 (pág. 180).

Erros que consideramos específicos de Cálculo:

a) Na compreensão do conceito de limites laterais. Exemplo: Ver Figura 15 (pág. 162).

b) Na aplicação do conceito de unicidade do limite: Exemplo: Ver Figura 14 (pág. 162).

c) De lapsos na escrita. Exemplo: Ver Figura 19 (pág. 172).

d) No cálculo do limite de uma função, a partir do gráfico da função, quando os estudantes associavam o limite à variável x, ou mesmo, quando eles não conseguiam observar, no eixo das ordenadas, para onde a função estava tendendo quando x se aproximava de um valor de a.

Para finalizar, apresentaremos um exemplo de dificuldade epistemológica do conceito de limite de funções que pode acontecer quando o estudante utiliza definições equivocadas para um mesmo conceito. Por exemplo, a definição de limite de função apresentada por A19, quando perguntamos, na entrevista (05/7/15), qual a definição que tinha de limite de função e o que significava dizer que $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Em sua resposta, a estudante oscila entre uma definição equivocada de que para calcular o limite de uma função é só substituir diretamente o valor de x=a, mas traz também indícios de uma compreensão formal de limites quando explica que podemos fazer x se aproximar de a, tanto se queira que as imagens desses respectivos valores de x para a função irão se aproximar de L.

Podemos perceber algo contraditório nas suas definições. Na primeira parte da resposta, parece que ela definiu o limite de uma função como algo operatório e instrumental (SKEMP, 1976). Ou seja, traz a ideia de limite como uma simples substituição, sem considerar se a função é contínua, ou não, no ponto. No entanto, na segunda, ela apresentou, de maneira consciente ou inconsciente, uma ideia intuitiva de limite bem próxima da definição formal. Quando ela diz que *o valor de x se aproxima de a cada vez mais e que as imagens desses valores de x se aproximarão de L,* *tanto quanto você queira só fazer o x se aproximar mais de a.* Quando ela afirmou em seus argumentos que podemos conseguir essa aproximação, na realidade podemos pensar que ela de certa forma associou em sua mente valores que na definição formal chamamos de épsilons e deltas. Parece-nos que essa estudante continua construindo e reconstruindo a sua imagem do conceito de limite. Acreditamos que essas contradições e erros de definições representam dificuldades epistemológicas para a compreensão dos conceitos de Cálculo. Por outro lado como afirmou Borasi (1986, 1987, 1989b), existe possibilidade de aprendizagem e provavelmente reconstrução de imagens de conceitos e definições de conceitos matemáticos como diriam Tall e Vinner (1981), quando professores e alunos usarem o potencial educativo dos erros ao analisarem e discutirem de forma consciente os mesmos.

Dentre os obstáculos epistemológicos apontados por Cornu (1991) para a compreensão da definição de limite, arriscamo-nos a dizer que a noção de infinitamente pequeno, quando os alunos necessitam utilizar a ideia de “aproximar de” um determinado número, pode ser um dos obstáculos que esses estudantes estejam encontrando para conseguirem compreender a ideia intuitiva de limite. Esse conjunto de erros aqui apontados depende de vários aspectos, como do grau de formalidade e abstração que foi utilizado por professores/alunos e alcançado nas aulas teóricas e práticas em que os referidos conceitos foram abordados. Portanto, os resultados aqui apresentados e nossas conclusões devem ser lidos dentro do contexto em que a pesquisa foi desenvolvida.

Reflexões e aprendizagens do pesquisador

Acreditamos que, para uma maior compreensão do limite de uma função, o professor precisa inserir, na rotina de sala de aula e em listas de exercícios sobre limites de funções, as três formas diferentes de explicação e resolução de tarefas: linguagem natural, representação geométrica e algébrica. Essas abordagens devem ser feitas para um mesmo limite de uma função, de modo que os alunos consigam transitar de uma representação para a outra sem nenhuma dúvida. Durante nossa investigação, usamos as três representações, mas, em muitos casos, com limites diferentes. Acreditamos que isso tenha dificultado que fizessem uma relação entre essas três maneiras de abordar o conceito de limite.

Em nossas aulas, acreditamos que adotamos durante toda a pesquisa uma postura de professor que priorizou uma aprendizagem instrumental (SKEMP, 1976), ao explorar o conceito de limite de funções. Passamos a ter essa consciência a partir do momento em que começamos a analisar, detalhadamente, as produções escritas dos estudantes, somente depois que já tínhamos implementado nossa investigação. Esses momentos de reflexão pessoal e outros junto com a orientadora nos permitiram ampliar nossos olhares a respeito de nosso estudo de doutorado, nossos objetivos e sobre passos futuros tanto como professor quanto como pesquisador e como professor pesquisador.

Começamos a perceber que não bastava fazer uma simples correção da solução do aluno. Foi preciso ter consciência das questões (e/ou suposições) que estávamos pensando investigar. Portanto, não conseguimos verificar e nem conseguimos propiciar, aos estudantes, o desenvolvimento de uma compreensão relacional do conceito de limite de funções (SKEMP, 1976). No cálculo de limite de funções polinomiais, quase não exigimos que eles aplicassem as propriedades dos limites ou explicassem os passos da resolução. Os alunos e nós, professores, na maioria das vezes, substituímos diretamente o valor numérico na função para encontrar o valor do limite.

Diante dos argumentos levantados anteriormente, podemos nos questionar: que faríamos de diferente na abordagem de limite de funções? Tecendo algumas ponderações, a partir da nossa experiência com essa investigação, acreditamos que:

- Os estudantes precisam experimentar uma variedade maior de problemas e precisam aprender a elaborá-los. Precisamos criar situações em sala de aula que exijam um pensamento matemático avançado para provocar imagens conceituais no aluno e devemos oportunizar momentos em que façam discussões e consigam fazer os ajustes necessários para a compreensão de um conceito.

- Precisamos oportunizar mais discussões em pequenos grupos ou com a sala toda. Enfim, precisamos criar uma postura de aprender a ouvir mais o aluno, ou seja, precisamos falar menos e deixar que os estudantes tenham a oportunidade de abrir debates nas aulas de Cálculo sobre seus entendimentos e suas dúvidas. Enfim, precisamos aprender a escutar atentamente nossos estudantes em um processo para aprender de fato auscultar como sugere Lorenzato (2010).

- Devemos utilizar mais a História da Matemática e a História do Cálculo em nossas aulas. Iniciamos uma pequena discussão com essa turma de estudantes repetentes e essa nossa atitude foi elogiada por todos.

- Apontamos muito para o conhecimento e para as dificuldades dos alunos, mas, e o conhecimento do professor? Nós, professores, sabemos que não somos capazes de dominar e discutir, com propriedade, todos os conteúdos de Cálculo, utilizando a História da Matemática, a Geometria, e a Álgebra. Que tipo de conhecimento matemático, conhecimento pedagógico-matemático e conhecimento curricular e histórico de Cálculo nós, professores universitários, precisamos ter?

- Adotamos livros e práticas de sala de aula que reproduzem o que está nos livros-textos, e não questionamos ou procuramos elaborar estratégias para desequilibrar os exemplos que estão postos. Em nossa pesquisa, procuramos mudar um pouco esta atitude, pois tínhamos o objetivo de criar conflitos cognitivos que pudessem auxiliar na compreensão dos conceitos de Cálculo. Mas, sabemos que ainda temos que aprender a alterar esta postura e prática de ensino em situações futuras.

- Se acreditarmos que o conhecimento matemático pode ser construído por meio de processos de abstrações reflexivas, em que podemos utilizar os erros cometidos pelos nossos alunos como "trampolim para a aprendizagem" (BORASI, 1985, p. 32), nós estamos dando um passo importante para ajudar nossos alunos a superarem suas dificuldades.

Dentre as ações apontadas pelos professores Guzmán, Hodgson, Robert, e Villani (2006) a fim de ajudar a atenuar as dificuldades dos alunos, uma ação nós precisamos incorporar em nossas aulas de Cálculo: "Menos é mais". Diminuir a quantidade de conteúdos apresentados em aulas no ensino superior, desde que o professor tenha um controle sobre o conteúdo do curso e tenha um panorama do que pode retirar do programa e/ou do que pode ser estudado posteriormente em outras disciplinas. Ademais, o professor precisa envolver os alunos em uma compreensão mais profunda e mais adequada dos conceitos matemáticos estudados no ensino superior. E concordamos com Skemp (1976) de que precisamos possibilitar que estudantes universitários adquiram tanto entendimento instrumental quanto relacional de conceitos de Cálculo, porque apenas com os dois entendimentos dos conceitos os estudantes poderão resolver e saber explicar por que e como resolvem tarefas matemáticas.

Para finalizar, nós, professores universitários, muitas vezes não nos preocupamos com os conteúdos e experiências que nossos alunos trazem para a universidade. Nós criamos expectativas em relação a um aluno ideal, que domina todos os conhecimentos prévios para aprender e compreender os conceitos da matemática que serão ensinados no ensino superior. Mas numa turma real esse tipo de estudante é raro. Arrisco-me a dizer que nem existe. Termino com a seguinte reflexão:

Os estudantes que nós tínhamos eram esses, nós dois (professor regente e professor-pesquisador) éramos os professores que eles tinham. Assim, podemos dizer que aprendemos muito. Acho que conseguimos desequilibrar a todos, inclusive a nós, professores!

Desdobramentos da pesquisa

Uma das questões que este estudo não conseguiu abordar está relacionada à compreensão relacional e à definição do conceito do limite de funções reais. Acreditamos que seria importante investigar e saber quais são os tipos de atividades relacionadas com o conceito de limite de função que podem favorecer uma compreensão relacional e uma definição do conceito. Outra questão, que merece ser objeto de investigação, seria como utilizar atividades investigativas e a elaboração de problemas na construção do conceito de limite.

REFERÊNCIAS

ALVES, R. **A arte de produzir fome**. São Paulo, 2007. Disponível em: https://rubemalves.wordpress.com/?s=A+arte+de+produzir+fome. Acesso: 20 dezembro de 2013.

AMORIM, L. I. F. **A (re)construção do conceito de limite do Cálculo para análise**: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática. 2011. 133f. (Dissertação de Mestrado). Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

BARBOSA, A. M. **O insucesso no ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. 2004. 102f. (Dissertação Mestrado). Programa de Pos Graduação em Educação, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba.

BARBOSA, J. C. Molelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais** ... Caxambu: ANPED, 2001. 1 CD-R0M.

BARON, M. E. **Curso de história da matemática**: origens e desenvolvimento do Cálculo. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985, vol 1-3.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral** . 1999. 195f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

BORASI, R. Using errors as springboards for the learning of mathematics; an introduction. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v.7, n. 3-4, p.1-14, 1985.

_____. **On the educational roles of mathematical errors**: Beyond Diagnosis and Remediation. PhD Dissertation State University of New York at Buffalo, 1986a.

_____. Algebraic explorations around the error: 16/64=1/4. **The Mathematics Teacher**. Vol. 79, n.4, p. 246-248, 1986b.

_____. Exploring mathematics through the analysis of errors. **For the Learnig of Mathematics** 7. F.L.M. Publishing Association Montreal, Quebec, Canada, 3 nov. 1987.

_____. Students' Constructive Uses of Mathematical Errors: A taxonomy. In: ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN EDUCACIONAL RESEARCH ASSOCIATION, 1989a, San Francisco, CA. **Proceedings** ... San Francisco, CA: American Educacional Research Association, March 1989a, p. 27-31.

_____. Definizioni incorrette di cerchio: uma miniera d'oro per gli insegnanti di matemática. **L' insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate**, v. 12, n.6, p. 773-795, giugno 1989b.

_____. **Reconceiving mathematics instruction:** a focus on errors. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.

BORUCHOVITCH. E.; GUIMARÃES. S. E. R. O estilo motivacional do professor e a motivação intrínseca dos estudantes: uma perspectiva da teoria da autodeterminação. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Campinas, 17(2), p.143-150, 2004.

BORTOLOTI, R. D. M.; FERREIRA, J. R.; SANTOS-WAGNER, V.M.P. **Análise Combinatória e a Licenciatura em Matemática na Bahia**. V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Rio de Janeiro, RJ. 2012.

BRITO, M. R. F. de. Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à matemática. **ZETETIKÉ**. São Paulo: UNICAMP. v.6. n.9. jan./jun. 1998.

BROLEZZI, A. C.. **Mudanças na matemática da escola básica para o ensino superior:** reflexo no uso de História da Matemática – IME/USP. 2003. Disponível em:http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/grupos.../gdt08-Brolezzi2.doc.%3. Acesso em 30 abr. 2013.

CAVASOTTO, M. **Dificuldades na aprendizagem de Cálculo**: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar. 2010. 146 f. (Dissertação Mestrado). Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul.

CATAPANI, E.C. **Alunos e professores em curso de Cálculo em serviço:** o que querem? 2001. 146 f. (Dissertação Mestrado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

CORNU. B. Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres', In: CINQUIÈME COLLOQUE DU GROUPE INTERNATIONALE PME, 1981, Grenoble. **Actes** ... Grenoble: PME, 1981, p. 322-326.

_____. **Apprentissage de la notion de limite:** conceptions et obstacles. Thèse de Doctorat, Université Grenoble Alpes, Grenoble, 1983.

_____. Limits. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, pp. 153-166.

CURY, H. N. **Análise de erros em demonstrações de geometria plana**: um estudo com alunos de 3º grau. 1989. 120 f. (Dissertação Mestrado). Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

_____. **Erros em soluções de problemas de cálculo diferencial e integral**: análise, classificação e tentativas de superação. Porto Alegre: PUCRS, Instituto de Matemática, 1990. Relatório de pesquisa.

_____. **As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos**. 1994. 276 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

_____. **Análise de erros em cálculo diferencial e integral**: resultados de investigações em cursos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 14 a 17 set., 2003, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro: Instituto Milita de Engenharia (IME), 2003. CD-ROM. (p. 72-81).

_____. Análise de erros em educação matemática. **Veritati**, Salvador, v. 3, n. 4, p. 95-107, jun. 2004.

_____. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

CURY, H. N.; CASSOL, M. Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. **Acta Scientiae**. v. 6, n.1, p. 27-36, jan/jun. 2004.

CURY, H. N.; OLIVEIRA, A. M. P. Da saliva e pó de giz ao software de computação algébrica: a difícil adaptação dos professores de matemática às exigências da sociedade informatizada. In: CURY, Helena Noronha (Org.). **Disciplinas matemáticas para cursos superiores:** reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre, RS: EDIPUCRS, 2004, p. 17-40.

DAVIS, R. B. The interplay of algebra, geometry, and logic. **Journal of Mathematical Behavior**, 1998, 7, pp.9-28.

DOMINGOS, A. M. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados**: a matemática no início do superior. 2003. 407f. Tese (Doutorado em Ciências de Educação). Universidade de Nova Lisboa, Lisboa.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publischers, 1991, pp. 25-41.

DUBINSKY,E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: Tall D. (ed.), **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Press, 95-102,1991.

ERNEST, P. The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In C. Keitel; P. Damerow; A. Bishop; P. Gerdes (Eds.). **Mathematics, education and society**. Paris: United Nations Educational Scientific. 1988, p. 99-101.

_____. The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. **Journal of Education for Teaching,** 15 (1), 13-33, 1989.

_____. **The philosophy of mathematics education**. Hampshire, U.K.: The Palmer Press, 1991.

ESTEBAN, M.T. **O que sabe quem erra?** Reflexões sobre avaliação e fracasso escolar**.** 2.ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: De Petrus et Alii, 2013. 200p.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FLICK, Uwe. **Uma introdução à pesquisa qualitativa**. Tradução de Dandra Netz. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2004, 312p.

FONSECA, H. Reflectir e investigar sobre a prática profissional. Org. GTI- **Grupo de Trabalho de Investigação**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. 1 ed. set. 2002.

FOSSA, J. A. Matemática, história e compreensão. **Revista Cocar**, v. 2, n. 4, p. 7-15, 2008.

FROTA, M. C. R. Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de cálculo. In: LACHINI, J.; LAUDARES, J. B. (Orgs.) **Educação matemática:** a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001, p. 89-121.

GARZELLA, F. A. C. **A disciplina de Cálculo I:** análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos. 2013. 275 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. **Matemática emocional**: os afetos na aprendizagem matemática. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003.

GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York, NY: Macmillan, 1992.

GUZMÁN, M.; HODGSON, B. R.; ROBERT, A.; VILLANI, V. Difficulties in the passage from secondary to terciary education. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS, 1998, Berlin. **Proceedings Extra Volume ICM III** ... Berlin: ICM, p. 747-762.

HITT, F. El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. In: Filloy E.; Hitt F.; Imaz C. Rivera A.; Ursini S. (Eds). **Matemática educativa:** aspectos de la investigación actual. Buenos Aires, Argentina: Ed. Fondo de Cultura Económica, 2003.

HITT, F.; CORTÉS, J.C. **Dificultades em el aprendizaje del cálculo**. Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su ensenanza. México: Ed. Morevallado. 2005.

HITT, F; LARA, H. Limits, continuity and discontinuity of functions from two points of View: That of the teacher and that of the student. **British society for research into learning mathematics**, Lancaster, U.K.,1999, p. 49-54.

HITT, F; MURILLO, R. P. Dificultades de aprendizaje del concepto de limite y actividades de enseñanza. In: **Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza**. CORTÉS, J. C; HITT, F. (Ed.). México: Ed. Morevallado, 2005, p. 112-134.

HITT F.; PÁEZ. R. The notion of limit and learning problems. PME-NA XXIII, v. 1, Utah, USA, 2001, **Proceedings** ... Utah: PME-NA, 2001, p. 169-176.

HITT F.; PÁEZ R. Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. **Revista Uno**, n. 32, 2003, p. 97-108.

JORDAAN, T. **Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students**. 2005. 87f. Master of Education. University of South Africa, South Africa.

JUTER, K. **Limits of functions**: university student's concept development. 2006. 175f. (Doctoral Thesis). Department of Mathematics, Lulea University of Technology, Lulea, 2006.

LEITHOLD, L. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Harbra, 1994.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3 ed. Rev. Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2010, 140p.

LIMA, G. L; SILVA, A. B. O ensino do cálculo na graduação em matemática: considerações baseadas no caso da USP. In: V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Petrópolis, Rio de Janeiro, 2012.

Anais... Petrópolis, Rio de Janeiro: SBEM, 2012, p.47-62. http://www.lematec.noip.org/CDS/VSIPEM/PDFs/GT04/CC18595006768_A.pdf.

MENDUNI, R. D. **Emoções que emergem da prática avaliativa**. 2003. 186f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

MURILLO, R. E. P. **Procesos de construcción del concepto de limite em un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión**. 2004. 354 f. (Tesis Doctorado) Centro de Investigación y de Estudios Avanzados Del IPN, Departamento de Matemática Educativa, Unidad Distrito Federal de México, Distrito Federal.

MCLEOD, D.B. Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In Douglas A. Grows (Ed.) **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Nova York: Macmillan, NCTM. 1992, p. 575-596.

______. Information-processing theories and mathematics learning: the role of affect, **International Journal of Educational Research**, 14, p.13-29,1990.

NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M. A. A transição do ensino médio para o superior: como minimizar as dificuldades em cálculo? In: V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Petrópolis, Rio de Janeiro, 2012. **Anais**... Petrópolis, Rio de Janeiro: SBEM, 2012, p. 1-18. http://www.lematec.no-ip.org/CDS/VSIPEM/PDFs/GT04/CC18595006768_A.pdf.

NASSER, L.; SOUSA, G.; TORRACA, M. A.; ASSEMANY, D.; AZEVEDO, C. A. M. A transição do ensino médio para o superior: dificuldades em problemas de taxas relacionadas. In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013. **Anais**... Curitiba, Paraná: SBEM, 2013, p. 1-16.

PÁEZ, R. **Dificultades de aprendizaje en el concepto de limite**: Ideas del infinito. 2001. 340 f. Tesis de Maestria. Cinvestav-IPN. Mexico.

PALIS, G. L. R. A transição do ensino médio para o ensino superior. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE, 2010. **Anais**... Salvador, Bahia: SBEM, 2010, p. 1-9.

PINTO, N. B. **O erro como estratégias didática no ensino da matemática elementar**. 1998. 147f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática**. 2. ed. Curitiba: Papirus, 2000.

PONTE, J. P. Reflectir e Investigar sobre a prática profissional. In: GTI- **Grupo de Trabalho de Investigação (Org.)**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. 1 ed. set., 2002.

______. Las creencias y concepciones de maestros como un tema fundamental en formación de maestros. In: Krainer, K.; Goffree, F. (ed.). **On research in teacher education:** from a study of teaching practices to issues in teacher education. Traducción (resumida) de Casimira López. Osnabrück: Forschungsintitut für Mathematikdidaktik, 1999, p. 43 - 50. Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-sp/Las%20creencias.pdf>. Acesso em: 10 maio 2013.

REIS, F.S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise:** a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas.

REZENDE, W. M.. **Uma análise histórica-epistêmica da operação limite**. 1994. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro.

______. **O ensino de Cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 450f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

ROCHA, M. M. **Um estudo do desenvolvimento de atividades investigativas na aprendizagem de matemática no ensino médio**. 2009. 211f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

SAD, L. A. **Cálculo diferencial e integral:** uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. 1998. Tese (Doutorado). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

SANTOS, H. M. C. **Limite**: um estudo sobre manuais escolares e exames em Portugal. 2010. 133f. (Dissertação de Mestrado). Escola de Ciências, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

SANTOS, V. M. P. dos. **Metacognitive awareness of prospective elementary teachers in a mathematics content course and a look at their knowledge, beliefs and metacognitive awareness about fractions**. 1993. Thesis (Doctoral of Philosophy) Department of Curriculum and Instruction (Mathematics Education) in the school of Education, Indiana University. Publicado por Associação de Professores de Matemática, Coleção Teses. Lisboa: APM, 1996.

______. Consciência metacognitiva de futuros professores primários numa disciplina de matemática e um exame de seu conhecimento, concepções e consciência metacognitiva sobre frações. **Série Documental:** Eventos, Brasília, INEP, n. 4, 2ª parte, abr., 1994, p. 1-20.

______. Matemática – conhecimento, concepções e consciência metacognitiva de professores em formação e em exercício. In: NASSER, Lilian (ed.). **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: Instituto de matemática da UFRJ, 1995, p. 117 - 132, (Trabalho apresentado neste seminário em julho de 1993).

______. (org.). **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática**: métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática, UFRJ, 1997.

SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Conversas, mensagens e notas de aula da orientadora sobre como elaborar um projeto de pesquisa, desenvolver a pesquisa, analisar as informações obtidas e redigir relato final, 2012, 2013, 2014, 2015 e 2016.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, 77, 1976, p. 20-26.

SIERPINSKA, A. Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite – **RDM**, vol. 6, nº1, pp. 5-67, 1985.

SILVA, C. M. S. da; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos S. O que um iniciante deve saber sobre a pesquisa em Educação Matemática? **Caderno de Pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFES,** Vitória, v. 10, n. 19, p. 10-23, jan./jun., 1999.

SILVA, E. C. da. **Prática matemática:** um exame de sua influência nas concepções e atitudes dos professores e alunos do ensino médio**,** 2007, 222f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

SILVA, G. A. **Reconceitualização das categorias de Skemp de compreensão relacional e compreensão instrumental como critérios globais**. 2013. 152f. Tese (Doutorado em Educação). Centro de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

SILVA, S. A. F. da. **Aprendizagens de professoras num grupo de estudos sobre matemática nas séries iniciais**. 2009. 364f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação, Vitória.

SITOE, A. A. Transição do ensino secundário para o ensino superior: sugestão para uma abordagem psico-epistemológica. **Revista Electrônica de Investigação e Desenvolvimento (REID)**, Moçambique, Universidade Católica de Moçambique, n. 3., p. 10-26, 2014.

SOARES, A. P. C; ALMEIDA, L. S. Transição para a universidade: apresentação e validação do questionário de expectativas acadêmicas (QEA). In: SILVA, B. D; ALMEIDA, L. S. A. (Orgs.), **Actas do VI Congresso Galaico- Português de Psicopedagogia**, **III**, 2001, Braga: Centro de Estudos em Educação e Psicologia, Universidade do Minho, 2001, pp. 899-909.

STEWART, James. **Cálculo**. vol. 1. 7. ed. São Paulo: Cenage Learning, 2013.

SWOKOWSKI, E. **Cálculo**. vol.1. 2.ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1994.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1991, p. 3-21.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, 1981, p. 151–169.

THOMPSON, A. G. A relação entre concepção de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica. Tradução de Gilberto F. A. de Melo. **Zetetiké**, Campinas: CEMPEM – FE/Unicamp, v. 5, n. 8, p. 11 - 44, jul./dez. 1997. (Trabalho foi publicado originalmente em inglês em 1984.).

VAZ, I.D. **Os conceitos de limite, derivada e integral em livros didáticos de Cálculo e na perspectiva de professores de matemática e de disciplinas específicas em cursos de engenharia**. 2010. 177 f. (Dissertação Mestrado em Educação). Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Mestrado em Educação Tecnológica, Belo Horizonte.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 65-81.

Von GLASERSFELD, E. **Radical constructivism in mathematics education**. Dordretch, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

WHITE, P & MITCHELMORE, M. Conceptual knowledge in introductory Calculus. **Journal for Research in Mathematics** 27(1):79-95. Disponível em: http://occawlonline.pearsoned.com/bookbind/pubbooks/thomas_awl/. 1996.

APÊNDICES

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIOS

Questionário 1 dos estudos exploratório e definitivo

Aluno:	Contatos:	Escola onde cursou ensino fundamental e médio:
Como era seu desempenho em matemática nos ensinos fundamental e médio:	Conteúdos de matemática que mais gostava de estudar:	Conteúdos de matemática que menos gostava de estudar:
Por que escolheu o curso de Agronomia ou Licenciatura:		

Questionário 2 dos estudos exploratório e definitivo

1) Quais são as disciplinas que você está estudando nesse semestre?	2) Qual(is) é(são) a(s) disciplina(s) que você sente mais dificuldade em assimilar conteúdos? Por quê?	3) Para você quanto tempo de estudo extra classe è necessário para se ter um bom desempenho em cálculo I?
4) Quantas horas de estudo você faz por dia, além do horário que você permanece na faculdade?	5) Quando você começou a frequentar o curso de agronomia, o que você ouvia falar sobre a disciplina de Cálculo I? E após frequentar o curso o que você pensa?	6) Você está cursando a disciplina de Cálculo I: ( ) pela segunda vez ( ) pela terceira vez ( ) pela quarta vez
7) Na sua análise, quais foram os motivos ou dificuldades que levaram você a repetir a disciplina de Cálculo I?	8) Que tipo de ajuda seria boa para superar essas dificuldades?	9) Quais os conteúdos de Cálculo I você aprendeu nesse semestre?
10) Quais os conteúdos de Cálculo I que você não aprendeu nesse semestre?	11) A metodologia utilizada e as explicações do professor de Cálculo I estão sendo suficientes para você entender os conteúdos que estão sendo expostos?	12) Quais são suas expectativas em relação ao seu desempenho nesse semestre na disciplina de Cálculo I: ( ) serei aprovado com facilidade ( ) serei aprovado, mas tive dificuldade ( ) tenho dificuldade e acho que não serei aprovado ( ) prefiro não responder essa pergunta

APÊNDICE B – ATIVIDADE DIAGNÓSTICA DA PESQUISA DEFINITIVA

Exercício 1) Calcule os limites, caso existam:

a) $Lim_{x \to \sqrt{3}} 10$ =

b) $Lim_{x \to 3}(2x - 1)$ =

c) $Lim_{x \to -2}(x^2 + x - 1)$ =

d) $Lim_{x \to 3}\left(\dfrac{4x - 5}{5x - 1}\right) =$

Tarefa 2) Para calcular os limites das funções abaixo, faça o que se pede em cada item:

(i) Use uma calculadora para tabular, até **quatro casas decimais**, os valores de f(x) para os valores fixados de x;

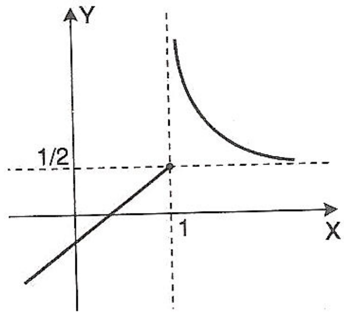
(ii) Do que f(x) parece tender quando x se aproxima de c?

(iii) Encontre o $Lim_{x \to c} f(x)$.

a) Sendo $f(x) = \left(\dfrac{x - 5}{x^2 - 25}\right)$ então calcule o $Lim_{x \to 5}\left(\dfrac{x - 5}{x^2 - 25}\right)$ sendo x : (4; 4,5 ; 4,9 ; 4,999) e (6; 5,5 ; 5,1; 5,01; 5,001) e c = 5.

b) Sendo $f(x) = \left(\dfrac{x^3 + 8}{x + 2}\right)$ então calcule o $Lim_{x \to -2}\left(\dfrac{x^3 + 8}{x + 2}\right)$ sendo x: (-2,5; -2,1; -2,01; -2,001) e (-1,5; -1,9; -1,99; -1,999) e c = -2 .

Tarefa 3) Seja F(x) a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre os limites abaixo, se existirem:

a) $Lim_{x \to 1^+} f(x)$ = b) $Lim_{x \to 1^-} f(x)$ = c) $Lim_{x \to 1} f(x)$ =

d) $Lim_{x \to -\infty} f(x)$ = e) $Lim_{x \to +\infty} f(x)$ =

APÊNDICE C – PRIMEIRA AVALIAÇÃO SOBRE LIMITES APLICADA EM 01/04/2014.

Questões

1. (10 pts) Calcule o limite das seguintes funções:

    a) $\lim_{x\to 10} 10$ = 10

    b) $\lim_{x\to 2} 3x + 10$ = 3.2 + 10 = 16

    c) $\lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{x^2-9}{x+9}}$

    d) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+4x^2-2}{x+2}$

2. (10 pts) Nas funções abaixo calcule os limites laterais quando a variável tende para os valores onde a função não é definida, diga se o limite existe e, caso exista, forneça seu valor (se for infinito ou menos infinito, represente seus simbolos com sendo os limites).

    a) $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$.

    b) $f(x) = \frac{4x}{27-x^3}$.

    c) $f(x) = \frac{4x}{9-x^2}$.

3. (10 pts) Nas funções abaixo, encontre as assíntotas horizontal e vertical e trace um esboço do gráfico.

    a) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$

    b) $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

4. (5 pts) Calcule os limites no infinito a seguir:

    a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+3x+4}{7x}$

    b) $\lim_{x\to\infty} 2\sqrt{x^2+x} - 2x + 8$

    c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x^4}$

5. (5pts) Diga onde está a descontinuidade da função $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ e remova a descontinuidade por uma redefinição adequada da função. Esboce como isso está ocorrendo no gráfico.

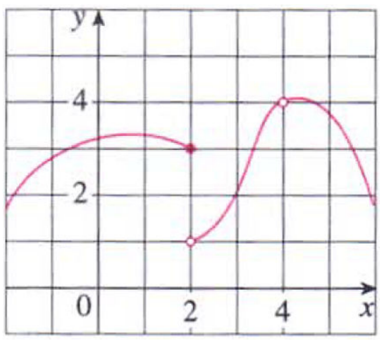
APÊNDICE D – Atividade de recuperação sobre limites

Nome: ________________________________ Data: 19/05/2014

1) Calcule o limite, se existir:

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ b) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right)$ c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{-x}$

2) Use o gráfico abaixo para determinar cada limite, quando existir.



a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

d) f(2)= e) $\lim_{x \to 4} f(x)$ f) f(4)=

3) Calcule os limites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^5 - 3x^3 + 2}{-x^2 + 7} \right)$ b) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\sqrt{2x^2 - 7}}{x + 3} \right)$ c) $\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x}{x^2 - 4} \right)$

APENDICE E – APROFUNDAMENTO SOBRE LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES REAIS

ATIVIDADE REALIZADA DIA 30/06/2014

01) Com base nas propriedades de limites, calcule os seguintes limites, justificando cada passo de sua resolução e responda aos questionamentos abaixo:

i) $\lim_{x \to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)$ ii) $\lim_{x \to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right)$

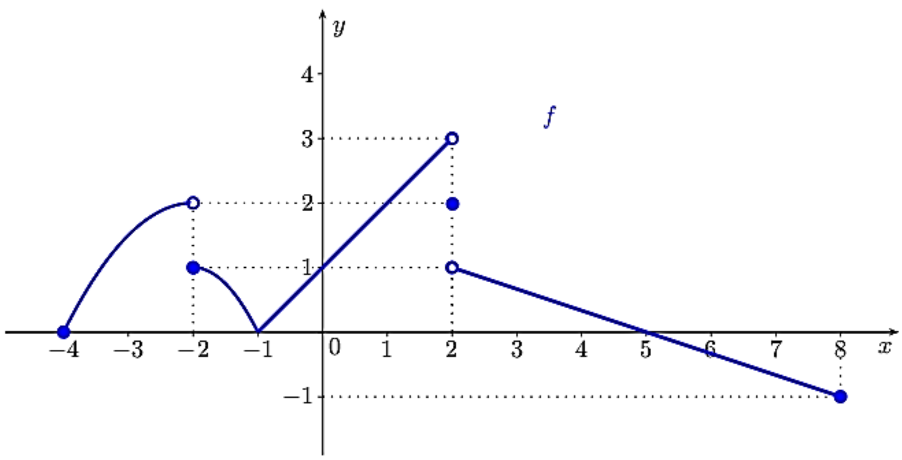
- Existe alguma semelhança entre os cálculos efetuados para encontrar os limites das funções acima? Caso existam algumas semelhanças, quais você identificou?

- Escolha um dos itens já calculado acima e o resolva de outra maneira. Existiria ainda outra forma encontrar esses limites?

02) Calcule os limites quando tende ao infinito das funções abaixo e justifique cada passo da sua resolução.

a) $\lim_{t \to -\infty}\left(\dfrac{t+1}{t^2+1}\right)$ b) $\lim_{x \to +\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)$

03) Para a função cujo o gráfico é mostrado abaixo, identifique cada limite se existir e determine os valores das funções em cada ponto solicitado.



a) $\lim_{x \to -2^+} f(x) =$ d) $\lim_{x \to 2} f(x) =$ g) $f(1) =$

b) $\lim_{x \to -2^-} f(x) =$ e) $f(2) =$ h) $\lim_{x \to 1} f(x) =$

c) $\lim_{x\to -2} f(x) =$ f) $\lim_{x\to -1} f(x) =$ i) $\lim_{x\to 5} f(x) =$

04) Utilizando o gráfico da função f(x) da questão anterior, responda:

a) Ao olhar o gráfico da função f, podemos dizer que a função f(x) dada pelo gráfico é contínua em todo o intervalo [-4,8]? Justifique sua resposta.

b) O que você entende por continuidade de uma função?

c) Se olharmos o valor de f(2) e o valor $\lim_{x\to 2} f(x)$ o que podemos dizer desses valores? O que podemos concluir a partir desses valores a respeito do limite e da continuidade dessa função?

d) Será que podemos dizer: se uma função é contínua em um intervalo [a,b], então o limite dessa função em qualquer x pertence a este intervalo sempre vai existir ? Justifique sua resposta.

05) Dada a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, determine suas assíntotas horizontal e vertical e faça um esboço de seu gráfico. Explique o que essas assíntotas representam no gráfico e quais os procedimentos que você utilizou para o traçado do gráfico.

APENDICE F – AVALIAÇÃO FINAL

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Itapina

Aluno (a) :

Data: 09/07/2014 – CALCULO I – TURMA EXTRA

PROVA FINAL 83,0

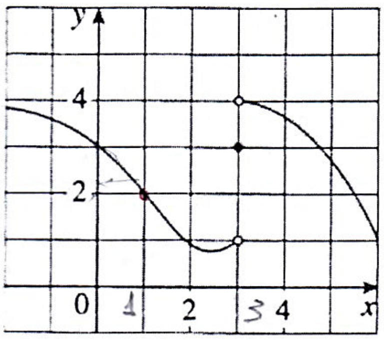
01) Com base nas propriedades de limites, calcule os seguintes limites, justificando cada passo de sua resolução.

a) $\lim_{x\to -3}(2x+4)$ = − 2

b) $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-9}{x-3}\right)$ = 6

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(3+x)^2-9}{x}$ = 6

02) Para a função f, cujo gráfico é dado abaixo, diga o valor de cada quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.



a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ = 2 b) f(1) = 2 c) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ = 1

d) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ = 4 e) $\lim_{x\to 3} f(x)$ = ∄ f) f(3) = 3

03) Utilize uma calculadora para tabular, até quatro casas decimais, os valores de f(x) para os valores fixados de x e responda os questionamentos abaixo:

$f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$ para x igual a 8; 8,5; 8,9 ; 8,99 ; 8,999 e para x igual a 10; 9,5; 9,1; 9,01; 9,001 e considere c = 9.

a) Construir uma tabela com os valores de x acima;

b) Do que f (x) parece tender quando x se aproxima de c=9?

c) Encontre o $\lim_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$, justifique sua resposta. 0,1666

04) Calcule os limites tendendo ao infinito das funções abaixo e justifique cada passo de sua resolução.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5-x^3}{8x+2}$ $-\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x^2+1}$ $+\infty$

05) Calcule a derivada das seguintes funções, aplicando os teoremas para técnicas de derivação.

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 5$

b) $g(t) = \dfrac{1}{3}t^4 + \dfrac{2}{5}t$

c) $h(x) = 3.senx + 7$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

e) $g(x) = (3x+2).(x^4+2x+1)$

f) $h(x) = \dfrac{x^2+1}{2x+4}$

06) Dada a função f(x) = x^2- 4 determine:

a) A equação da reta tangente a essa função que passa pelo ponto x = 3.

b) Represente graficamente: a função f(x) e sua derivada no ponto x=3.

c) Calcule a derivada de f(x) e compare como o coeficiente angular da reta tangente. O que podemos dizer sobre estes dois valores?

07) Se R(x) for o rendimento total recebido das vendas de x produtos agrícolas e $R(x) = 600x - \dfrac{1}{20}x^3$. Determine:

a) A função rendimento marginal;

b) O rendimento marginal quando x=20;

c) O rendimento real da venda do vigésimo primeiro produto.

APENDICE G – CRONOGRAMA DAS ETAPAS REALIZADAS NA PESQUISA

DATA	HISTÓRICO	OBJETIVOS	INSTRUMENTOS/PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS
17/02 **1ª etapa**	Questionário 1, para conhecer melhor os alunos em diversos aspectos como: vida escolar anterior, como era o desempenho em matemática nas séries anteriores e sobre a escolha do curso.	Conhecer e analisar as diversas informações sobre aspectos da vida escolar dos alunos.	Questionário com perguntas semi-estruturadas. As perguntas foram respondidas durante os primeiros 20 minutos de aula.
24/02 **1ª etapa**	Questionário 2, elaboramos perguntas que poderiam trazer informações sobre: hábitos de estudos, a relação dos alunos com a disciplina de cálculo, suas expectativas em relação seu desempenho na disciplina de Cálculo I neste semestre.	Examinar de maneira geral informações sobre as dificuldades dos alunos na disciplina de Cálculo I, observar hábitos de estudos, disciplinas que estão cursando e principalmente conhecer a motivação dos alunos para frequentar a disciplina de cálculo novamente.	Questionário com perguntas semi-estruturadas. As questões foram aplicadas durante 30 minutos finais da aula.
10/03 **2ª etapa**	Atividade diagnóstica sobre limites.	1- Verificar se os alunos compreendem a noção de limite de uma função dentro da perspectiva aritmética, e algébrica com as funções racionais e geometricamente a partir do gráfico de uma função; 2- Identificar quais os conhecimentos mínimos de função que os alunos apresentam sobre domínio, imagem e gráfico, para determinação de limites.	Elaboramos um teste com três itens. Nesse teste exploramos conceitos aritméticos, algébricos e geométricos para a resolução de limites de funções. Utilizamos duas aulas de 50 minutos para realização dessa tarefa.
01/04 **3ª etapa**	Avaliação individual para verificação de aprendizagem sobre limites.	Averiguar se os alunos compreenderam como: i) calcular o limite de uma função real; ii) descobrir a descontinuidade de	Avaliação individual representando 40% da nota do semestre. A avaliação teve duração de 1h 40min.

		funções; iii) utilizar os conceitos de limites para obter informações sobre a descontinuidade ou não de uma função e trazer essas informações para construção de gráficos das funções.	
07/04 e 08/04 **4ª etapa**	Analisando com a turma os principais erros cometidos na primeira avaliação de limites.	Constatar e analisar os tipos de erros cometidos pelos alunos nesta primeira avaliação e com isso levá-los a uma reflexão sobre esses erros. Observar se eles eram capazes de identificar os erros e levantar suas possíveis causas. Com essas informações em mãos poderíamos trabalhar o conteúdo a partir de nova perspectiva.	Utilizamos projeções de imagens com os erros cometidos pela turma sem identificação dos alunos. A turma analisava o erro dos colegas e apontava as causas desses erros e tentava apresentar a solução correta da questão. Utilizamos quatro aulas de 50 minutos para a realização dessa atividade da pesquisa.
30/04 ***** **5ª etapa**	Recuperação paralela sobre limites em horário contra turno	Diminuir a evasão da turma, pois constatamos nos questionários para conhecer melhor a turma e a partir de conversas individuais com os educandos que muitos deles desistem do curso após o fracasso na primeira avaliação.	Avaliação individual abordando os principais itens que eles erraram na avaliação anterior. A duração dessa avaliação foi de 1h 40min.
19/05 ***** **6ª etapa**	Atividade avaliativa de recuperação paralela sobre limites.	Rever os principais obstáculos de aprendizagem dos conteúdos de limites que os alunos apresentaram nas atividades e provas. Construir e analisar estratégias que favoreçam a resolução dos exercícios que os estudantes julgam serem difíceis. Fazer uma revisão dos principais conteúdos de limites para exame final.	A tarefa foi desenvolvida em dois momentos. Num primeiro momento os alunos resolveram as questões individualmente por aproximadamente uma hora. No segundo momento por 40 minutos os educandos socializaram com a turma suas resoluções e comentários no quadro. Cada questão foi entregue separadamente de acordo com as questões que os alunos já tinham terminado de resolver.

30/06 ***** **7ª etapa**	Aprofundamento dos conteúdos sobre limites e continuidade de funções reais.	Desenvolver a capacidade dos estudantes de criar estratégias para resolver determinado cálculo por mais de um caminho. Favorecer a escrita maternática para justificar os conceitos e cálculos, tendo em vista a familiarização do aluno com representações aritméticas, algébricas e geométricas dos conceitos de limites e continuidade de funções reais.	Atividade foi realizada individualmente durante duas aulas de 50 minutos.
09/07 **8ª etapa**	Exame final ou prova final.	Identificar e analisar o que os alunos compreenderam de limites durante o semestre letivo. Nessa avaliação foram cobrados os conteúdos de limites e derivadas, mas vamos analisar somente a parte de limites na pesquisa de doutorado.	Avaliação individual realizada durante duas aulas de 50 minutos.

Observação: *Os instrumentos de pesquisa aplicados nos dias 30/04, 19/05 e 30/06 foram realizados em horário extra com a turma.

APÊNDICE H – ROTEIRO DA ENTREVISTA COM OS ESTUDANTES SELECIONADOS

* Conversar de maneira informal com o aluno, dar boas vindas e perguntar sobre como anda sua vida acadêmica e pessoal, e quais são os seus projetos para sua carreira acadêmica e pessoal;

* Perguntar se ele aceita que seja gravada essa entrevista;

* A entrevista será composta de três momentos ou etapas:

1º momento:

Perguntar o que ele lembra sobre limites; ou hoje quando ele escuta a palavra limites do que ele se lembra de limite de função;

O que significa dizer que um limite tende ao valor **a**? Sobre alguns símbolos utilizados para representação matemática de limites de funções;

Falar especificamente sobre seu desempenho nas atividades e avaliações sobre limites;

Trazer alguns resultados de limites de funções que ele resolveu corretamente;

Trazer alguns resultados de limites de funções que ele não conseguiu resolver corretamente ou resolveu parcialmente correto;

Questionar algumas resoluções que estão equivocadas ou que não conseguimos dizer nada sobre a resolução que o estudante apresentou;

Trazer algumas atividades de limites com funções descontínuas em certos pontos para observar se ele consegue perceber essa descontinuidade e observar quais as estratégias que o estudante vai utilizar na resolução dos exercícios;

Trazer gráficos de funções e ver como ele consegue perceber o valor dos limites de função em certo valor atribuído para x.

2º momento:

Conversar com o estudante sobre a pesquisa, quais os pontos que mais ajudaram e quais não ajudaram na sua aprendizagem;

O que ele sugere que nós, professores, podemos fazer para ajudar alunos em dependência;

O que mais motiva ele a estudar?

Se ele consegue ver alguma conexão dos conteúdos ensinados na disciplina de Cálculo I com o curso de Agronomia;

QUESTÃO 01

a) Defina limite de uma função.

b) Explique o que significa que $\lim_{x\to 3}(x-1)=2$? Represente este limite graficamente.

c) Justifique porque $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)=2$

d) O que significa a expressão $\lim_{x\to a} f(x)=L$?

QUESTÃO 02

Para calcular o limite da função abaixo, faça o que se pede em cada item:

Sendo $f(x)=\left(\dfrac{x-5}{x^2-25}\right)$ então:

(i) Use uma calculadora para tabular, até **quatro casas decimais**, os valores de f(x) para os valores fixados de x;

x	Y= $\left(\dfrac{x-5}{x^2-25}\right)$
4	
4,5	
4,9	
4,999	
4,9999	

x	Y= $\left(\dfrac{x-5}{x^2-25}\right)$
6	
5,5	
5,1	
5,01	
5,001	
5,0001	

(ii) Do que f(x) parece tender quando x se aproxima de c?

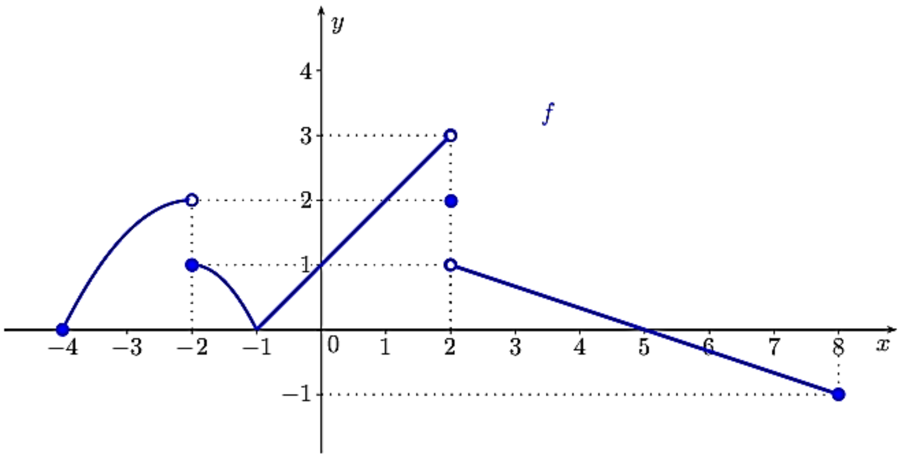
(iii) Encontre o $Lim_{x\to c} f(x).$ e c = 5.

Ou seja: Calcule o $Lim_{x\to 5}\left(\dfrac{x-5}{x^2-25}\right)$

*Existem outras formas de calcular este limite? Se sua resposta for sim, quais? Justifique sua resposta.

QUESTÃO 03

Para a função f(x) cujo gráfico é mostrado abaixo, identifique cada limite se existir e determine os valores das funções em cada ponto solicitado. Explique como você calcula esses limites a partir do gráfico da função.



a) $\lim_{x\to -2^+} f(x) =$

b) $\lim_{x\to -2^-} f(x) =$

c) $\lim_{x\to -2} f(x) =$

d) $\lim_{x\to 2} f(x) =$

e) $f(2) =$

f) $\lim_{x\to -1} f(x) =$

g) $f(1) =$

h) $\lim_{x\to 1} f(x) =$

i) $\lim_{x\to 5} f(x) =$

j) $\lim_{x\to \_} f(x) = 1$

APÊNDICE I – PROJETO CÁLCULO

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO ESPÍRITO SANTO (IFES)

CAMPUS ITAPINA

PROJETO CÁLCULO: Revisando os conteúdos significativos para a aprendizagem de Cálculo I

Professor Messenas Miranda Rocha

Colatina - ES

Sumário

1. Introdução

A literatura tem consagrado que o ensino-aprendizagem de Cálculo no ensino superior é um tema que causa preocupação em várias discussões no Brasil e no mundo (BARUFI 1999; DOMINGOS, 2003; REZENDE, 2003; TALL,1991). Uma das preocupações é o alto índice de reprovação que há nos cursos de Cálculo I que é a “porta de entrada” de diversos cursos de graduação, tais como Ciências Contábeis, Engenharias (por exemplo, Engenharia Civil, Mecânica, Elétrica, Produção, Agronômica, e outras) e Licenciaturas (Biologia, Matemática, Física, Ciências Agrárias e outras).

Os alunos ingressam no ensino superior em cursos de graduação (engenharias, biologia, farmácia, licenciaturas em matemática e física e outros) que têm a disciplina de Cálculo I e nos quais existem várias expectativas dos professores universitários de matemática distintas das expectativas dos alunos. Essas expectativas diferenciadas de professores e alunos quanto ao papel do Cálculo na formação profissional dos estudantes gera tensão e dificuldades de aprendizagem nos alunos (GOMÉZ CHACÓN, 2003).

Para Domingos (2003), verificam-se elevados níveis de retenção nos primeiros anos na graduação, sobretudo nas disciplinas voltadas para a construção e compreensão dos conceitos matemáticos mais abstratos. Os professores esperam que os estudantes compreendam e trabalhem adequadamente com pensamento matemático avançado (TALL, 1991). Segundo Barufi (1999), na visão dos professores universitários matemáticos, espera-se, no curso de Cálculo I, propiciar aos alunos uma visão mais ampla e global de como o conhecimento matemático pode ser articulado na resolução de problemas reais. E muitos alunos ainda seguem usando o pensamento matemático da educação básica. Percebemos então um impasse entre a matemática básica estudada nos ensinos fundamental e médio, ou seja, o pensamento matemático elementar do aluno voltado para compreender conceitos matemáticos e utilizá-los em tarefas matemáticas variadas e o que é exigido de pensamento matemático avançado na introdução do Cálculo I. Desejamos agora, na disciplina de Cálculo I na graduação, que nossos alunos ingressantes e repetentes compreendam e construam novos conceitos e sintam-se seguros para trabalhar e/ou modelar problemas matemáticos reais e aplicados às mais diversas ciências (SKEMP, 1976; REZENDE, 2003; GOMÉZ CHACÓN, 2003). Por outro lado, segundo Barufi (1999) e Rezende (2003), nem sempre se leva em consideração, a maneira pela qual o conhecimento matemático trabalhado na disciplina de Cálculo I foi sendo historicamente construído e estruturado.

A situação se agrava a cada ano devido às dificuldades de aprendizagem da Matemática Básica (Ensino Fundamental e Médio), evidenciadas pelos resultados das avaliações de grande escala, tais como as provas do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA).

No Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo Campus Itapina a situação não é diferente. Face às preocupações com as condições de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I, os professores que ministram essa disciplina têm desenvolvido, desde 2010, um projeto de atendimento às dificuldades dos alunos dessa disciplina, com foco em revisar paralelamente aos conteúdos de Cálculo, os conteúdos da matemática básica que são considerados como pré-requisitos para um melhor desempenho da disciplina de Cálculo I.

Acreditamos que, com o esforço individual de cada aluno, em horário extra turno, para estudar os conteúdos da matemática básica e com o auxílio dos monitores da disciplina de Cálculo I, será possível auxiliar de forma significativa os alunos, promovendo uma aprendizagem mais consistente e mais autônoma. Com este projeto e com atividades planejadas especificamente para sanar essas dificuldades da matemática básica durante todo o semestre, pretendemos atingir o maior número de alunos que apresentam dificuldades de aprendizagem na disciplina de Cálculo I.

2. Objetivos

2.1. Geral: Revisar os conteúdos matemáticos básicos de forma significativa para os alunos dos períodos iniciantes dos cursos superiores de Agronomia e LICA.

2.2. Específicos:

a) analisar as dificuldades apresentadas referentes aos conteúdos da matemática básica, através de uma atividade diagnóstica no início de cada semestre letivo, para o planejamento das estratégias de ensino e aprendizagem;

b) elaborar um material didático revisional que contemple os conteúdos da matemática básica que são pré-requisitos para conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral I;

c) criar o hábito de estudos diariamente para a disciplina de Cálculo I exigindo do aluno participante do projeto o cumprimento das atividades propostas;

d) atender os alunos individualmente ou em pequenos grupos, com o apoio de monitores da disciplina de Cálculo I;

e) planejar e aplicar instrumentos pedagógicos que levem o aluno na construção do seu conhecimento de maneira individual e coletiva;

f) reduzir a reprovação, a evasão e o baixo desempenho dos alunos na disciplina de Cálculo I.

3. Descrição do projeto

Como um dos objetivos do presente projeto, que é reduzir a reprovação, a evasão e o baixo desempenho dos alunos na disciplina de Cálculo I, em fevereiro de 2011 iniciamos os trabalhos com os alunos com uma carga horária semanal de duas horas, durante os três primeiros meses do curso, em horário contra turno da disciplina de Cálculo I. Nesse projeto iniciou-se com uma sondagem dos conteúdos da matemática básica que se encontra no Anexo I.

Os professores da disciplina ficam a disposição durante essas duas horas com a turma, para orientar os alunos e monitores na execução das tarefas propostas. O trabalho dos professores, alunos e monitores serão constantemente avaliados, na medida do possível, sendo feitos ajustes visando o aprimoramento e sucesso do projeto.

4. Sujeitos do projeto

Os participantes do projeto serão os monitores e os alunos do Curso de Engenharia Agronômica e do Curso de Licenciatura em Ciências Agrárias que estão frequentando a disciplina de Cálculo I pela primeira vez ou alunos repetentes dos semestres anteriores.

5. Resultados obtidos

O projeto iniciou em 2011, e a cada ano foi sendo intensificado o projeto e foram corrigidas algumas falhas, como por exemplo, a não exigência da participação do educando. Como os alunos não eram obrigados a frequentar o projeto, tínhamos inicialmente uma participação de apenas 40% da turma. No decorrer dos semestres os resultados foram surgindo e conseguimos atingir uma participação de mais de 80% dos alunos. Dessa forma foi possível avaliar o aluno que participava do projeto com um percentual de 20% do total da nota da disciplina de Cálculo, com algumas atividades desenvolvidas no projeto. Em 2014 conseguimos com uma turma de alunos repetentes, atingir um índice de aprovação superior a 84% dos alunos que frequentaram a disciplina de Cálculo I. Observamos que este projeto tem incentivado os alunos a se manterem envolvidos com a disciplina e tem favorecido o fortalecimento da relação professor x aluno e aluno x aluno.

Os estudantes estão mostrando a partir desse contato extracurricular com professores e com os demais colegas que reconhecem que estamos preocupados (instituição, professores e colegas) com a busca de soluções para suas dificuldades de aprendizagem. Acreditamos que este é o caminho e que estamos dando um passo importante para a qualificação dos nossos alunos.

Na tabela abaixo, temos os resultados dos alunos do Curso de Agronomia e Licenciatura em Ciências Agrárias na disciplina de Cálculo I, no IFES Campus Itapina.

CURSO AGRONOMIA				
ANO/SEMESTRE	**APROV.**	**REPROV.**	**DESIST.**	**TOTAL**
2011/2	15	2	-	17
2012/1	12	4	4	20
2012/2	14	31	-	45
2013/1	21	9	8	38
2013/2	12	18	5	35
2014/1	25	5	8	38
TOTAL	99	69	25	193

CURSO LICENCIATURA CIÊNCIAS AGRÁRIAS				
ANO/SEMESTRE	**APROV.**	**REPROV.**	**DESIST.**	**TOTAL**
2012/2	8	22	1	31
2013/2	11	7	21	39
TOTAL	19	29	22	70

6. Referências

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral** . 1999. 195f. Tese (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

DOMINGOS, A. M. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados**- a matemática no início do superior. 2003. 407f. Tese (Doutorado em Ciências de Educação) - Universidade de Nova Lisboa, Lisboa.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. **Matemática emocional**: os afetos na aprendizagem matemática. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 450f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, 77, p. 20-26, 1976.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1991. pp. 3-21.

APÊNDICE J – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para adultos

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu,____,
RG nº________________________CPF nº ________________________, estou sendo convidado para participar do estudo "**CONCEITO DE DERIVADA: UMA PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM PARA ALUNOS EM DEPENDÊNCIA NA DISCIPLINA DE CÁLCULO I**".

Passo a saber que este estudo tem como objetivo verificar e analisar como os alunos em dependência formulam, compreendem e representam o conceito de derivada em situações convencionais e tradicionais de Cálculo, em situações-problema de aplicação de derivada e se compreendem e sabem relacionar e aplicar o conceito de derivada com outros conceitos matemáticos.

Sei também que esta pesquisa não apresenta nenhum risco à minha pessoa e entendo que traz, não somente para mim, mas para toda a comunidade escolar, como benefício, a possibilidade de melhoria do processo de ensino aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.

Os dados serão coletados através de entrevistas, gravadas em áudio, observações de aulas, bem como por meio de anotações realizadas durante as mesmas.

Em qualquer etapa da pesquisa, terei acesso ao pesquisador responsável, Messenas Miranda Rocha, que pode ser encontrado no endereço Rua: Judith Leão Castelo, nº 690, Centro, Baixo Guandu, ES, celular (27) 99997-7441 ou messenas@yahoo.com.br

As informações que eu fornecer para o pesquisador, serão guardadas em formatos de áudio e vídeo, posteriormente, transcritas e não serão utilizadas em meu prejuízo ou de outras pessoas, inclusive na forma de danos à estima, prestígio e prejuízo econômico ou financeiro.

Como voluntário, durante ou depois da pesquisa é garantido o anonimato das informações que eu fornecer.

Posso entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos do Instituto Federal do Espírito Santo, onde esta pesquisa foi aprovada, no endereço Av. Vitória, 1729 – Jucutuquara - CEP 29040-780 – Vitória – ES – Fone/Fax: + 55 27 3331-2119/2217/2203, pelo e-mail etica.pesquisa@ifes.edu.br ou pelo site www.ifes.edu.br.

Li ou foi lido para minha pessoa às informações sobre o estudo e estou claramente informado sobre minha participação neste estudo.

Fica claro para mim quais são as finalidades do estudo, os riscos e benefícios para minha pessoa, a forma como a pesquisa será aplicada para minha pessoa e a garantia de confidencialidade e privacidade de minhas informações.

Concordo em participar voluntariamente deste estudo e, se for de meu desejo, poderei deixar de participar deste estudo em qualquer momento, durante ou após minha participação, sem penalidades, perdas ou prejuízos para minha pessoa ou de qualquer equipamento ou benefício que possa ter adquirido.

Colatina-ES, _________ de ___________________ de 2014.

Assinatura do Pesquisador   Assinatura do Voluntário Participante

ANEXOS

ANEXO 1 – PLANO DE ENSINO DA DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I DO CURSO DE LICENCIATURA EM CIÊNCIAS AGRÁRIAS

CURSO: LICA (Licenciatura em Ciências Agrárias)
UNIDADE CURRICULAR: Cálculo I
COORDENADOR:
PROFESSOR:
PERÍODO LETIVO: Primeiro período
CARGA HORÁRIA: 60 horas.

OBJETIVOS

GERAL: Desenvolver a capacidade de raciocínio e compreensão dos conceitos que envolvem o cálculo de limites e continuidade de funções, criando soluções para questões propostas, adquirindo condições para discutir e criticar soluções obtidas comparando resultados de relevância cientifica bem como o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo na tomada de decisões.

ESPECÍFICOS:

Determinar o campo de definição de uma função;
Interpretar geometricamente a definição de limite;
Resolver limites de funções de uma variável;
Determinar se a função é continua ou descontinua;
Resolver problemas práticos utilizando limites e continuidade;

Aplicar as técnicas de resolução de limites no estudo de problemas práticos expressos matematicamente por funções;

Aplicar as técnicas de derivadas na resolução de problemas do cotidiano;

Usar os conceitos de limite no estudo de derivadas com grande relevância nos problemas científicos.

EMENTA

Revisão dos tópicos do ensino fundamental e médio que serão utilizados na disciplina. Limites. Continuidade. Derivada. Aplicações das Derivadas.

PRÉ-REQUISITO

Não apresenta.

CONTEÚDOS	CARGA HORÁRIA

ESTRATÉGIA DE APRENDIZAGEM

Aulas expositivas interativas.
Aplicação de lista de exercícios.
Atendimento individualizado.

RECURSOS METODOLÓGICOS

Quadro branco, retroprojetor, calculadoras gráficas, computadores e projetor de multimídia.

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

CRITÉRIOS	INSTRUMENTOS
Observação do desempenho individual verificando se o aluno identificou, sugeriu e assimilou as atividades solicitadas de acordo com as técnicas de aprendizagem previstas.	Provas, listas de exercícios e trabalhos envolvendo estudos de caso.

Bibliografia Básica (títulos, periódicos, etc.)						
Título/Periódico	**Autor**	**Ed.**	**Local**	**Editora**	**Ano**	**ISBN**
O Cálculo com Geometria Analítica, vol. 1	LEITHOLD, L.	3ª		Editora Harbra	1994	8529400941
O Cálculo com Geometria Analítica, vol. 2	LEITHOLD, L.	3ª		Editora Harbra	1994	
Um Curso de Cálculo, vol. 1	GUIDORIZZI, L.H.	5ª		Livros Técnicos e Científicos	2001	8521612591
Cálculo, vol. 1	ANTON, H.	8ª		Editora Bookman	2007	8560031634
Bibliografia Complementar (títulos, periódicos, etc.)						
Título/Periódico	**Autor**	**Ed.**	**Local**	**Editora**	**Ano**	**ISBN**
Um Curso de Cálculo, vol. 2	GUIDORIZZI, L.H.	5ª		Livros Técnicos e Científicos	2001	
Um Curso de Cálculo, vol. 3	GUIDORIZZI, L.H.	5ª		Livros Técnicos e Científicos	2001	
Um Curso de Cálculo, vol. 4	GUIDORIZZI, L.H.	5ª		Livros Técnicos e Científicos	2001	

ANEXO 2 - PLANO DE ENSINO DA DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I DO CURSO DE AGRONOMIA

CURSO: Agronomia
UNIDADE CURRICULAR: Cálculo I
COORDENADOR:
PROFESSOR:
PERÍODO LETIVO: Primeiro período
CARGA HORÁRIA: 60 horas.

OBJETIVOS
GERAL: Desenvolver a capacidade de raciocínio e compreensão dos conceitos que envolvem o cálculo de limites e continuidade de funções, criando soluções para questões propostas, adquirindo condições para discutir e criticar soluções obtidas comparando resultados de relevância cientifica bem como o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo na tomada de decisões. **ESPECÍFICOS:** Determinar o campo de definição de uma função; Interpretar geometricamente a definição de limite; Resolver limites de funções de uma variável; Determinar se a função é continua ou descontinua; Resolver problemas práticos utilizando limites e continuidade; Aplicar as técnicas de resolução de limites no estudo de problemas práticos expressos matematicamente por funções; Aplicar as técnicas de derivadas na resolução de problemas do cotidiano; Usar os conceitos de limite no estudo de derivadas com grande relevância nos problemas científicos.
EMENTA
Revisão dos tópicos do ensino fundamental e médio que serão utilizados na disciplina. Limites. Continuidade. Derivada. Aplicações das Derivadas.
PRÉ-REQUISITO
Não apresenta.

CONTEÚDOS	CARGA HORÁRIA

ESTRATÉGIA DE APRENDIZAGEM
Aulas expositivas interativas. Aplicação de lista de exercícios. Atendimento individualizado.
RECURSOS METODOLÓGICOS
Quadro branco, retroprojetor, calculadoras gráficas, computadores e projetor de multimídia.
AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

CRITÉRIOS	INSTRUMENTOS
Observação do desempenho individual verificando se o aluno identificou, sugeriu e assimilou as atividades solicitadas de acordo com as técnicas de aprendizagem previstas.	Provas, listas de exercícios e trabalhos envolvendo estudos de caso.

Bibliografia Básica (títulos, periódicos, etc.)						
Título/Periódico	**Autor**	**Ed.**	**Local**	**Editora**	**Ano**	**ISBN**
O Cálculo com Geometria Analítica, vol. 1	LEITHOLD, L.	3ª		Editora Harbra	1994	8529400941
O Cálculo com Geometria Analítica, vol. 2	LEITHOLD, L.	3ª		Editora Harbra	1994	
Um Curso de Cálculo, vol. 1	GUIDORIZZI, L.H.	5ª		Livros Técnicos e Científicos	2001	8521612591
Cálculo, vol. 1	ANTON, H.	8ª		Editora Bookman	2007	8560031634

Bibliografia Complementar (títulos, periódicos, etc.)						
Título/Periódico	**Autor**	**Ed.**	**Local**	**Editora**	**Ano**	**ISBN**
Um Curso de Cálculo, vol. 2	GUIDORIZZI, L.H.	5ª		Livros Técnicos e Científicos	2001	
Um Curso de Cálculo, vol. 3	GUIDORIZZI, L.H.	5ª		Livros Técnicos e Científicos	2001	
Um Curso de Cálculo, vol. 4	GUIDORIZZI, L.H.	5ª		Livros Técnicos e Científicos	2001	